PRÓBNY EGZAMIN GIMNAZJALNY 2012 – 11 – 14
OMÓWIENIE ODPOWIEDZI

Zadanie 1.
Do dzbanka wlano 2 jednakowe butelki soku.

Ile takich samych butelek wody należy dolać do dzbanka, aby sok stanowił 25% napoju? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A. 2 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8

Zadanie z pogranicza chemii i matematyki, możemy skorzystać ze wzoru:

$$C_P = \frac{m_S}{m_R} \cdot 100\%$$

Masa substancji wynosi 2 jednostki, które jednocześnie, tworzą już masę całego roztworu, zatem należy dolać 6 dzbanków wody, ponieważ:

$$C_P = \frac{2}{2+6} \cdot 100\% = \frac{2}{8} \cdot 100\% = 25\%$$

<u>ODP: C</u>

Zadanie 2.
Cztery pompy o jednakowej wydajności pracując jednocześnie, wypompowały wodę zgromadzoną w zbiorniku w czasie 12 godzin.

Ile takich pomp należałoby użyć, aby tę samą ilość wody wypompować w ciągu 6 godzin? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A. 2 **B.** 3 **C.** 6 **D.** 8

Zadanie z wielkości odwrotnie proporcjonalnych. Im więcej pomp, tym krótszy czas wypompowywania wody. Zadanie możemy zrobić zwyczajnie wymnażając podane dane:

$$4 \cdot 12 = 6 \cdot x$$
$$48 = 6x$$
$$x = 8$$

X to oczywiście ilość pomp, szukana w zadaniu.

<u>ODP: D</u>

Zadanie 3.
Korzystając z tego, że $27^2 = 729$, $48^2 = 2304$ i $27 \cdot 48 = 1296$, oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

$\sqrt{27 \cdot 48 \cdot 27 \cdot 48} = 1296$	**P**	**F**
$\sqrt{729} \cdot 48 = \sqrt{2304} \cdot 27$	**P**	**F**

Wykorzystując dane z polecenia, mamy w pierwszym równaniu prawdę, ponieważ:

$$\sqrt{27^2 \cdot 48^2} = 27 \cdot 48 = 1296$$
$$L = P$$

Z kolei w drugim równaniu także prawdę, gdyż:

$$\sqrt{729} \cdot 48 = \sqrt{2304} \cdot 27$$
$$27 \cdot 48 = 48 \cdot 27$$
$$L = P$$

ODP: P / P

Zadanie 4.
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Wyrażenie $\frac{3^3 \cdot 3^4}{(3^3)^4}$ ma wartość

A. 3^{-5} **B.** 3^0 **C.** 3^5 **D.** 3^{-1}

W liczniku wykładniku należy dodać, w mianowniku pomnożyć. Na końcu należy je odjąć:

$$\frac{3^7}{3^{12}} = 3^{-5}$$

ODP: A

Zadanie 5.
W pudełku znajduje się 6 losów, wśród których są 2 losy wygrywające.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu wygrywającego jest dwukrotnie mniejsze, niż wyciągnięcia losu przegrywającego.	**P**	**F**
Jeśli do pudełka włożymy dodatkowy los wygrywający, to prawdopodobieństwo wygranej wzrośnie.	**P**	**F**

Prawdopodobieństwo to z definicji ilość zdarzeń sprzyjających przez ilość wszystkich możliwości, zatem P(A), że wygramy wynosi:

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Z kolei prawdopodobieństwo przegranej wynosi:

$$P(A') = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Zatem faktycznie prawdopodobieństwo wygranej jest dwukrotnie mniejsze od prawdopodobieństwa wygranej.

Oczywiście dołożenie losu wygrywającego, zgodnie z tym co podpowiada nam intuicja, powoduje zwiększenie szansy wygranej do:

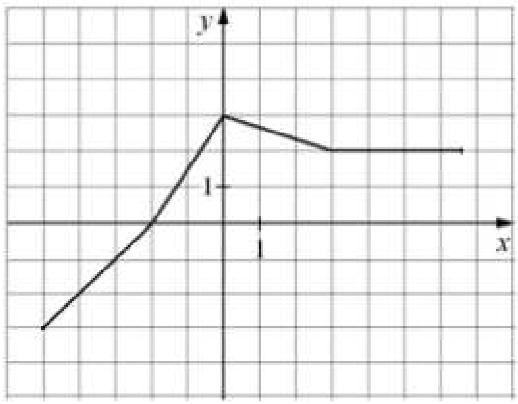
$$P(A) = \frac{3}{7}$$

$$\frac{3}{7} > \frac{1}{3}$$

Pamiętajcie, że dokładając los wygrywający zwiększamy też ilość wszystkich losów ogółem, więc zarówno licznik, jak i mianownik powiększamy o jeden.

ODP: P / P

Zadanie 6.
Na rysunku przedstawiono wykres pewnej funkcji.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Funkcja przyjmuje wartość –1 dla argumentu $x = -3$.	**P**	**F**
Dla wszystkich argumentów $x \le 0$ funkcja przyjmuje wartości ujemne.	**P**	**F**

Odnajdujemy na osi OX argument –3, wartość dla niego to faktycznie –1 (odczytujemy ją z osi OY)

Dla argumentów mniejszych lub równych zero (czyli ćwiartka II i III układu współrzędnych) funkcja przyjmuje zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne, zatem jest to fałsz.

ODP: P / F

Zadanie 7.
W pewnej kawiarni podaje się klientom dziennie średnio 70 filiżanek kawy. Ze 100 g ziarnistej kawy można przygotować 22 filiżanki tego napoju.

Ile co najmniej półkilogramowych paczek kawy musi kupić właściciel, aby wystarczyło jej na 7 dni? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Skoro ze 100g ziarnistej kawy jesteśmy w stanie przygotować 22 filiżanki napoju, to z opakowania 500g przygotujemy 5 razy tyle filiżanek:

$$22 \cdot 5 = 110$$

Skoro kawy ma nam starczyć na cały tydzień, to potrzebujemy takiej ilości, aby móc zrobić:

$$70 \cdot 7 = 490$$

I dalej wystarczy podzielić:

$$\frac{490}{110} \approx 4{,}45 \approx 5$$

Należy zatem zakupić 5 paczek kawy.

ODP: C

Zadanie 8.
Pan Nowak postanowił kupić wykładzinę na prostokątną podłogę o wymiarach 3 m i 4 m. Pod uwagę wziął dwa typy wykładziny.

Typ wykładziny	Szerokość wykładziny	Cena wykładziny
welurowa	4 m	35 zł za 1 m^2
wełniana	3 m	95 zł za 1 metr bieżący

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Cena 1 m^2 wykładziny welurowej jest niższa niż cena 1 m^2 wykładziny wełnianej.	**P**	**F**
Kupując tańszą wykładzinę, pan Nowak zaoszczędzi 40 zł.	**P**	**F**

Biorąc pod uwagę wykładzinę welurową możemy ją kupować na m^2, więc mnożymy pole naszej podłogi ($12m^2$) przez cenę za metr, z kolei operując metrami bieżącymi mamy cenę od razu za $3m^2$, więc wystarczy podaną kwotę za metr bieżący pomnożyć przez 4.

$$12 \cdot 35 = 420zl$$

$$95 \cdot 4 = 380zl$$

ODP: F / P

Zadanie 9.
W jakim stosunku można podzielić odcinek o długości 36 cm, aby z otrzymanych trzech odcinków zbudować trójkąt? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

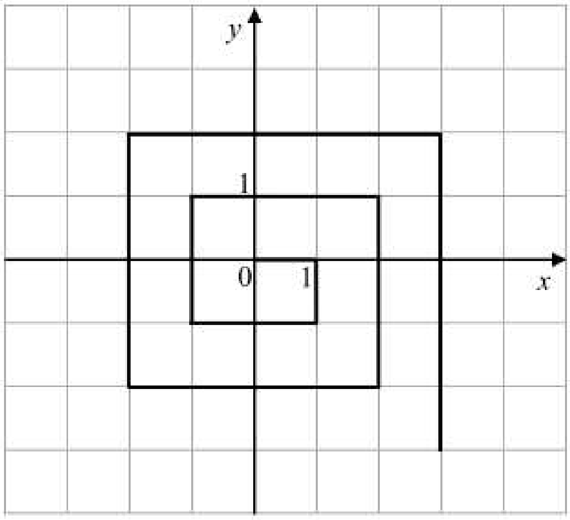
A. 1 : 2 : 6 **B.** 1 : 3 : 5 **C.** 2 : 3 : 4 **D.** 2 : 3 : 7

Aby móc zbudować trójkąt, suma dwóch krótszych boków musi być większa od trzeciego boku, ta zależność jest spełniona tylko w przypadku odpowiedzi C

$$2+3>4$$

ODP: C

Informacje do zadań 10. i 11.
Zaczynając od punktu (0,0) budujemy łamaną, której część składającą się z 10 odcinków przedstawiono na rysunku. Kolejne odcinki łamanej numerujemy kolejnymi liczbami naturalnymi. Pierwszy odcinek łamanej ma długość 1.



Zadanie 10.
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Jeżeli n jest liczbą parzystą, to odcinek o numerze n jest równoległy do osi y.	**P**	**F**
Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to długość odcinka o numerze n jest równa $\frac{n}{2}+1$.	**P**	**F**

Każdy z odcinków o numerze parzystym (2, 4, 6, ...) jest faktycznie równoległy do osi OY. Wystarczy dokładnie przyjrzeć się łamanej.

Z kolei nieparzyste nie mają długości podanej w zadaniu, można to łatwo udowodnić wstawiając n=1, pierwszy odcinek ma długość 1, a z zadaniu wynikałoby, że ma długość 1,5

ODP: P / F

Zadanie 11.
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Łamana złożona z początkowych 7 odcinków ma długość 16.	**P**	**F**
Długość setnego odcinka łamanej jest równa 100.	**P**	**F**

Wystarczy policzyć sumę długości pierwszych 7 odcinków łamanej:

$$1+1+2+2+3+3+4=2+4+6+4=16$$

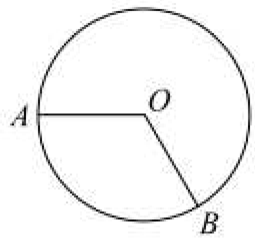
Długość setnego odcinka nie może mieć długości 100, gdyż długość 1 mają odcinki o numerze 1 oraz 2, długość równą dwa, odcinki o numerach 3 oraz 4 itd.

ODP: P / F

Zadanie 12.
Do okręgu o środku O należą punkty A i B. Okrąg ma długość 54, a łuk AB ma długość 18.

Jaką miarę ma kąt środkowy oparty na tym łuku?
Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A. 72°
B. 120°
C. 150°
D. 240°



Obliczmy jaką część okręgu tworzy kąt AOB, a następnie obliczmy miarę kąta środkowego:

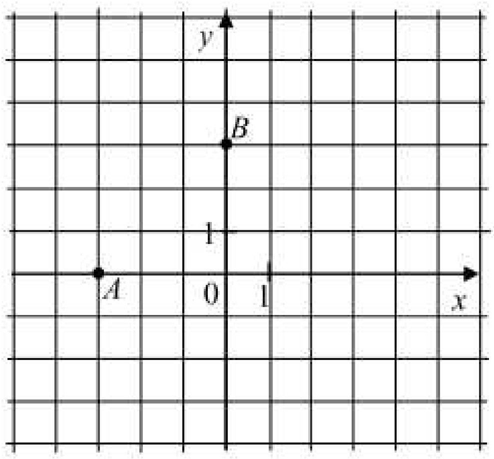
$$\frac{18}{54}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}\cdot 360^\circ = 120^\circ$$

ODP: B

Zadanie 13.

W układzie współrzędnych zaznaczono wierzchołki A i B czworokąta $ABCD$. Osie układu współrzędnych są osiami symetrii tego czworokąta.



Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Pole czworokąta $ABCD$ jest równe

A. 9
B. 12
C. 18
D. 36

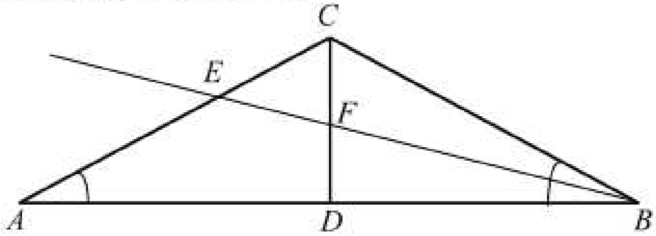
Pole obliczamy stosując wzór na pole deltoidu, gdyż przekątne przecinają się pod kątem prostym:

$$P = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18$$

ODP: C

Zadanie 14.

W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $|AC| = |BC|$ i $|\sphericalangle ABC| = 30°$ poprowadzono wysokość CD i dwusieczną kąta ABC przecinającą bok AC w punkcie E. Wysokość i dwusieczna przecinają się w punkcie F.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

$\lvert\sphericalangle BEC\rvert = 45°$	**P**	**F**
$\lvert EF\rvert = \lvert EC\rvert$	**P**	**F**

Skoro trójkąt jest równoramienny, to:

$$|\angle ABC| = |\angle BAC| = 30^\circ$$

$$|\angle ACB| = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$$

Z kolei dwusieczna kąta przy wierzchołku B dzieli go na dwie równe części (po 15 stopni), zatem:

$$\left|\angle BEC\right| = 180^\circ - 120^\circ - 15^\circ = 45^\circ$$

Przeanalizujmy kąty w trójkącie CEF, jeśli faktycznie odcinki EF oraz EC mają mieć równą długość, to kąty przy wierzchołkach F oraz C w tym trójkącie muszą mieć równą miarę.

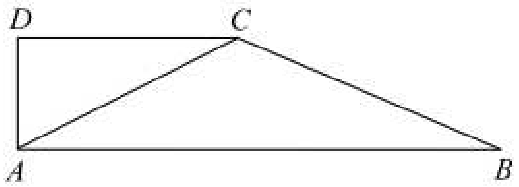
$$\left|\angle ECF\right| = 120^\circ : 2 = 60^\circ$$

$$\left|\angle EFC\right| = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$$

ODP: P / F

Zadanie 15.

Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach długości 22 cm, 10 cm i wysokości 5 cm. Odcinek AC jest przekątną tego trapezu.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Trójkąt ABC jest równoramienny.	**P**	**F**
Bok BC ma długość 12 cm.	**P**	**F**

Obliczmy długości odcinków AC oraz BC z twierdzenia Pitagorasa:,

$$5^2 + 12^2 = \left|BC\right|^2$$

$$25 + 144 = \left|BC\right|^2$$

$$\left|BC\right| = \sqrt{169} = 13$$

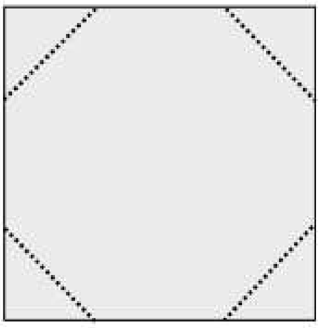
$$5^2 + 10^2 = \left|AC\right|^2$$

$$25 + 100 = \left|AC\right|^2$$

$$\left|BC\right| = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

Zatem trójkąt nie jest równoramienny, a długość odcinka BC nie jest równa 12
ODP: F / F

Zadanie 16.
Z kwadratowego kartonika odcięto naroża, tak jak pokazano na rysunku i otrzymano ośmiokąt foremny o bokach długości 4.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Kartonik był kwadratem o boku 12.	**P**	**F**
Suma pól odciętych naroży jest równa 16.	**P**	**F**

Obliczmy długość odciętego skrawka kartonika z tw. Pitagorasa:

$$a^2 + a^2 = 4^2$$
$$2a^2 = 16$$
$$a^2 = 8$$
$$a = 2\sqrt{2}$$

Zatem długość boku kwadratu wynosi:

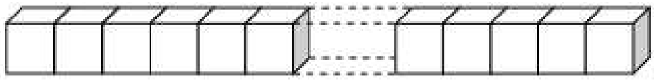
$$2\sqrt{2} \cdot 2 + 4 = 4\sqrt{2} + 4$$

Z kolei suma obciętych pól to:

$$P = 4 \cdot \frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 2 \cdot 8 = 16$$

ODP: F / P

Zadanie 17.
Sześcian o objętości 1 m^3 rozcięto na sześciany o krawędzi 1 cm. Gdyby wszystkie otrzymane sześciany ustawiono jeden za drugim, tak jak na rysunku, to powstałby prostopadłościan.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Jedna z krawędzi powstałego prostopadłościanu miałaby długość 10 km.	**P**	**F**
Objętość prostopadłościanu byłaby 100 razy większa od objętości początkowego sześcianu.	**P**	**F**

Zamieniając jednostki, łatwo można dojść do tego ile było sześcianików ułożonych jeden za drugim:

$$1m^3 = 1000000cm^3$$

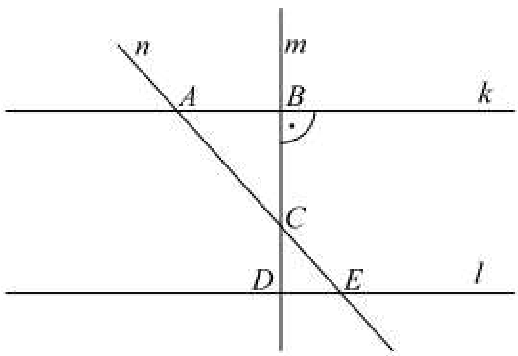
Zatem jeśli idzie o krawędź powstałego prostopadłościanu wystarczy zamienić jednostki:

$$1000000cm = 10000m = 10km$$

Z kolei objętości podanych figur muszą być sobie równe, niezależnie od tego jak potnie się daną bryłę.

ODP: P / F

Zadanie 18.
Dwie proste równoległe k i l przecięto prostymi m i n w sposób przedstawiony na rysunku.



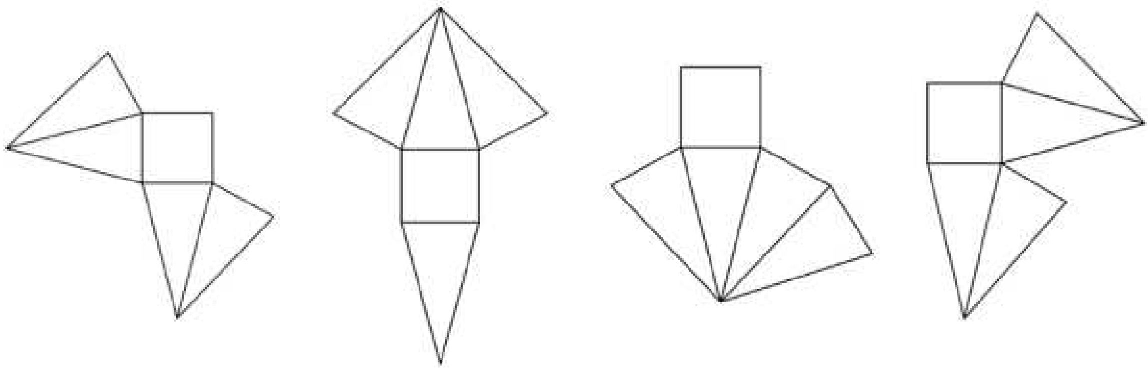
Czy trójkąty *ABC* i *EDC* są podobne? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) oraz jej uzasadnienie spośród zdań oznaczonych literami A–C.

T	ponieważ	**A.**	te trójkąty mają wspólny wierzchołek.
		B.	te trójkąty mają boki różnej długości.
N		**C.**	te trójkąty mają odpowiednie kąty równej miary.

Oba trójkąty mają po kącie prostym, kąty ACB oraz DCE to kąty wierzchołkowe, zatem mają równe miary, z tego wynika, że kąty BAC oraz CED, także muszą mieć równe miary.

ODP: T / C

Zadanie 19.
Który z poniższych rysunków <u>nie może</u> być siatką ostrosłupa prawidłowego czworokątnego? Wybierz odpowiedź spośród podanych.



A. **B.** **C.** **D.**

Trzeba tutaj uruchomić swoją wyobraźnie, siatka D nie złoży się, gdyż ściany boczne się pokryją.

ODP: D

Zadanie 20.
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Jeżeli długość każdej krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego zwiększymy 2 razy, a jego wysokość zmniejszymy 2 razy, to objętość ostrosłupa

A. zwiększy się czterokrotnie.
B. zwiększy się dwukrotnie.
C. zmniejszy się dwukrotnie.
D. nie zmieni się.

Zadanie polega na przekształceniu wzoru na objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot (2a)^2 \cdot \frac{1}{2} H = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot a^2 \cdot H$$

ODP: B

Zadanie 21.
Na zakup biletów do kina klasa 3a zebrała 360 zł, klasy 3b i 3c po 300 zł, a klasa 3d – 240 zł. Szkole udzielono rabatu i wszystkie bilety kosztowały 1000 zł. Uzyskany rabat podzielono między cztery klasy proporcjonalnie do zebranych kwot. Jaką kwotę zwrócono klasie 3a? Zapisz obliczenia.

Łącznie wszystkie klasy zebrały:

$$360 + 2 \cdot 300 + 240 = 1200zl$$

Skoro za wszystkie bilety zapłacono 1000zł, to zostało do podziału 200zł. Należy je podzielić procentowo wg wkładu wszystkich, tj:

Klasa 3A: $$\frac{360}{1200} = 0{,}3 \qquad 0{,}3 \cdot 200 = 60zl$$

Klasa 3B i 3C: $$\frac{300}{1200} = 0{,}25 \qquad 0{,}25 \cdot 200 = 50zl$$

Klasa 3D: $$\frac{240}{1200} = 0{,}2 \qquad 0{,}2 \cdot 200 = 40zl$$

ODP: Klasa 3A dostanie 60zł zwrotu, klasy 3B i 3C po 50zł, a 3D 40zł

Zadanie 22.
Paweł rzucił 5 razy zwykłą sześcienną kostką do gry. Zapisane kolejno wyniki rzutów utworzyły liczbę pięciocyfrową. Liczba ta jest parzysta i podzielna przez 9, a jej początkowe trzy cyfry to: 3, 1, 2. Ile oczek wyrzucił Paweł za czwartym i piątym razem? Podaj wszystkie możliwości. Odpowiedź uzasadnij.

Zapisane kolejne wyniki tworzą liczbę pięciocyfrową: 312XY

Skoro ma to być liczba parzysta to Y musi być 2, 4, lub 6. A z kolei cecha podzielności przez 9 mówi, iż suma cyfr musi się dzielić przez 9.

Dla Y=2
3+1+2+X+2=8+X, zatem X =1

Dla Y=4
3+1+2+X+4=10+X, zatem nie można dobrać takiego X

Dla Y=6
3+1+2+X+6=12+X, zatem X =6

ODP: Paweł musiał wyrzucić 1 i 2, lub 6 i 6.

Zadanie 23.
Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 264 cm^2. Pole podstawy tej bryły stanowi 75% pola powierzchni jednej ściany bocznej. Oblicz wysokość bryły. Zapisz obliczenia.

Podstawą jest kwadrat, z kolei pola ścian bocznych to prostokąty

$$P_P = a^2$$
$$P_B = 4aH$$
$$P_C = 2a^2 + 4aH$$

Uwzględniając warunki zadania, dostajemy układ równań:

$$a^2 = 0{,}75 \cdot aH \ / : a$$
$$264 = 2a^2 + 4aH$$

$$a = \frac{3}{4}H$$
$$264 = 2 \cdot (\frac{3}{4}H)^2 + 4 \cdot \frac{3}{4}H \cdot H$$

$$264 = \frac{9}{8}H^2 + 3H^2$$
$$264 = \frac{33}{8}H^2 \ / : \frac{33}{8}$$
$$H^2 = 64$$
$$H = 8cm$$

ODP: Wysokość bryły wynosi 8cm.