Zadanie 1. (*1 pkt*)

Wartość liczby $a = 16\sqrt[3]{4}$ jest równa wartości liczby:

A. $2^{\frac{4}{3}}$ **B.** $2^{\frac{7}{3}}$ **C.** $2^{\frac{5}{3}}$ **D.** $2^{\frac{14}{3}}$

Zamieniamy liczbę na potęgę o podstawie dwa, mamy więc:

$16\sqrt[3]{4} = 2^4 \cdot 2^{2/3} = 2^{14/3}$

ODP: D

Zadanie 2. (*1 pkt*)

Miejscem zerowym funkcji f określonej wzorem $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{dla } x \in (-\infty, -4\rangle \\ 5x + 10 & \text{dla } x \in (-4, 2) \\ x + 4 & \text{dla } x \in \langle 2, +\infty) \end{cases}$ jest:

A. -4 **B.** -2 **C.** -1 **D.** 1

Zerujemy każdą z funkcji, sprawdzając jednocześnie czy nasz wynik należy do podanego obok przedziału, otrzymujemy więc:

$x^2 - 1 = 0$
$x = \pm 1 \notin D_1$

$5x + 10 = 0$
$x = -2 \in D$

$x + 4 = 0$
$x = -4 \notin D_3$

ODP: B

Zadanie 3. (*1 pkt*)

Funkcja f, określona wzorem $f(x) = x^2 - 3x - 4$, przyjmuje wartości ujemne jedynie w przedziale:

A. $\left\langle -\infty, \frac{3}{2} \right\rangle$ **B.** $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ **C.** $(-1, 4)$ **D.** $(-4, 1)$

$x^2 - 3x - 4 < 0$

$\Delta = 9 + 16 = 25$

$x_1 = \frac{3-5}{2} = -1$

$x_1 = \frac{3+5}{2} = 4$

$x \in (-1,4)$

ODP: C

Zadanie 4. (*1 pkt*)

Wartość liczby $25^{\log_5 2}$ jest równa:

A. 2 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 2^5

$$25^{\log_5 2} = 5^{2\log_5 2} = 5^{\log_5 2^2} = 2^2 = 4$$

ODP: B

Zadanie 5. (*1 pkt*)

Dany jest ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = -n^2 + 16$ dla $n \geq 1$. Liczba dodatnich wyrazów tego ciągu jest równa:

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 7

$-n^2 + 16 > 0$

$(4-n)(4+n) > 0$

$n \in (-4,4)$

$n \in \{1,2,3\}$

ODP: A

Zadanie 6. (*1 pkt*)

Kwotę 10000 zł wpłacamy do banku na 4 lata. Kapitalizacja odsetek jest dokonywana w tym banku co kwartał, a roczna stopa procentowa wynosi 3%. Po 4 latach kwotę na rachunku będzie można opisać wzorem:

A. $10000 \cdot (1{,}0075)^4$ **B.** $10000 \cdot (1{,}03)^4$ **C.** $10000 \cdot (1{,}03)^{16}$ **D.** $10000 \cdot (1{,}0075)^{16}$

Korzystamy ze wzoru na procent składany, jednocześnie musimy pamiętać, iż co kwartał bank dopisuje nam tylko ¼ z 3%w skali roku, z kolei ilość okresów kapitalizacji w ciągu 4 lat wynosi 16 (gdyż tyle jest w tym okresie kwartałów)

$$K = 10000 \cdot (1{,}0075)^{16}$$

ODP: D

Zadanie 7. (*1 pkt*)

Dane liczby: $x = \frac{3}{\sqrt{5}-2}$, $y = \frac{12}{\sqrt{5}-1}+1$, $z = 3\sqrt{5}+2$ tworzą rosnący ciąg arytmetyczny w kolejności:

A. z, y, x **B.** y, x, z **C.** x, y, z **D.** z, x, y

Usuwamy niewymierności z mianownika:

$$x = \frac{3}{\sqrt{5}-2} \cdot \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \frac{3(\sqrt{5}+2)}{5-4} = 3\sqrt{5}+6$$
$$y = \frac{12}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} + 1 = \frac{12(\sqrt{5}+1)}{5-1} + 1 = 3(\sqrt{5}+1)+1 = 3\sqrt{5}+4$$
$$z = 3\sqrt{5}+2$$

ODP: A

Zadanie 8. (*1 pkt*)

Suma $2n$ początkowych liczb naturalnych dodatnich parzystych jest równa:

A. $S_{2n} = 8n^2 + 4n$ **B.** $S_{2n} = 4n^2 + 2n$ **C.** $S_{2n} = 4n^2 + n$ **D.** $S_{2n} = 2n^2 + 2n$

$S_1 = 2 + 4 = 6$

$S_2 = 2 + 4 + 6 + 8 = 20$

Jedyna z odpowiedzi, która spełnia te kryteria jest

$S_n = 4n^2 + 2n$

ODP: B

Zadanie 9. (*1 pkt*)

W trójkącie równoramiennym wysokość jest dwa razy dłuższa od podstawy. Wynika stąd, że sinus kąta przy podstawie wynosi:

A. $\frac{\sqrt{17}}{17}$ **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\frac{4\sqrt{17}}{17}$ **D.** $\frac{1}{17}$

$x^2 + (4x)^2 = y^2$

$y^2 = 17x^2$

$y = \sqrt{17}x$

$\sin\alpha = \frac{4x}{\sqrt{17}x} = \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$

ODP: C

Zadanie 10. (*1 pkt*)

Dziedziną funkcji f, określonej wzorem $f(x) = \frac{x-5}{x^2+4}$, jest zbiór:

A. $\boldsymbol{R} \setminus \{-4, 4\}$ **B.** $\boldsymbol{R} \setminus \{-4\}$ **C.** $\boldsymbol{R}$ **D.** $\boldsymbol{R} \setminus \{5\}$

Dziedziną funkcji

$f(x) = \frac{x-5}{x^2+4}$

$x^2 + 4 \neq 0$

$x^2 \neq -4$

$x \in R$

ODP: C

Zadanie 11. (*1 pkt*)

Liczbą przeciwną do liczby $a = 5^{\frac{2}{3}}$ jest:

A. $5^{\frac{3}{2}}$ **B.** $-5^{\frac{3}{2}}$ **C.** $5^{-\frac{2}{3}}$ **D.** $-5^{\frac{2}{3}}$

Liczba przeciwna różni się tylko znakiem (nie mylić z liczbą odwrotną!), więc jest nią:

$-5^{2/3}$

ODP: C

Zadanie 12. (*1 pkt*)

Wzór funkcji, której wykres powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji f o 10 jednostek w dół, to:

A. $y = f(x+10)$ **B.** $y = f(x)+10$ **C.** $y = f(x-10)$ **D.** $y = f(x)-10$

Przesunięcie wykresu w dół otrzymuje się poprzez odjęcie od całej funkcji 10 jednostek, zatem:

$f(x) \Rightarrow f(x) - 10$

ODP: D

Zadanie 13. (*1 pkt*)

Rzucono sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo, że wyrzucona liczba oczek jest liczbą pierwszą, wynosi:

A. $\frac{4}{6}$ **B.** $\frac{3}{6}$ **C.** $\frac{2}{6}$ **D.** $\frac{1}{6}$

Liczby pierwsze to liczby podzielne przez siebie i przez jeden (przez nic więcej), zatem wśród cyfr, które znajdują się na kości do gry będą to: 2, 3 oraz 5

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ODP: B

Zadanie 14. (*1 pkt*)

Kąt α jest ostry i $\mathrm{tg}\alpha = \frac{12}{5}$. Wówczas $\cos\alpha$ jest równy:

A. $\frac{5}{12}$ **B.** $\frac{5}{13}$ **C.** $\frac{10}{13}$ **D.** $\frac{12}{13}$

Z tw. Pitagorasa:

$$5^2 + 12^2 = x^2$$

$$x^2 = 25 + 144$$

$$x = \sqrt{169} = 13$$

$$\cos\alpha = \frac{5}{13}$$

ODP: B

Zadanie 15. (*1 pkt*)

Wielomian $W = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$ po rozłożeniu na czynniki ma postać wyrażenia:

A. $x^2(x-2)$ **B.** $x^2(x-4)$ **C.** $(x+2)(x-2)^2$ **D.** $(x-2)(x+2)^2$

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 8$$

$$x^2(x-2) - 4(x+2)$$

$$(x-2)\cdot(x^2-4)$$

$$(x-2)^2\cdot(x+2)$$

ODP: C

Zadanie 16. (*1 pkt*)

Zbiór $(-\infty, -8\rangle \cup \langle -4, +\infty)$ jest rozwiązaniem nierówności:

A. $|x-6| \le 2$ **B.** $|x-6| \ge 2$ **C.** $|x+6| \le 2$ **D.** $|x+6| \ge 2$

Wyznaczamy środek pomiędzy punktami –8 oraz –4, jest to –6, ta liczba musi nam wyzerować moduł, zatem w grę wchodzą odpowiedzi C lub D. Oczywiście odległość od środka naszego przedziału musi być większa lub równa 2, gdyż zbiór podany w założeniach zadania rozchodzi się do plus i minus nieskończoności

ODP: D

Zadanie 17. (*1 pkt*)

Funkcja $f(x)=2x^2-4x+5$ jest malejąca w przedziale:

A. $(2,+\infty)$ **B.** $(-\infty,2)$ **C.** $(-\infty,1)$ **D.** $(1,+\infty)$

Funkcja ma ramiona zwrócone do góry (tzw. buźka uśmiechnięta), zatem jest malejąca w przedziale od –nieskończoności do p (współrzędnej x wierzchołka)

$$p=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{4}=1$$

ODP: C

Zadanie 18. (*1 pkt*)

Proste l i k są prostopadłe i $l: 2x-9y+6=0$, $k: y=ax+b$. Wówczas:

A. $a=-\frac{2}{9}$ **B.** $a=\frac{2}{9}$ **C.** $a=-\frac{9}{2}$ **D.** $a=\frac{9}{2}$

Proste prostopadłe mają odwrotne współczynniki kierunkowe, wraz ze zmienionym znakiem, zatem wyliczamy najpierw y z podanego równania prostej l

$$-9y=-2x-6$$

$$y=\frac{2}{9}x+\frac{2}{3}$$

$$a'=-\frac{9}{2}$$

ODP: C

Zadanie 19. (*1 pkt*)

Iloraz ciągu geometrycznego o wyrazie ogólnym $a_n=2\cdot 7^n$ jest równy:

A. $q=2$ **B.** $q=7$ **C.** $q=9$ **D.** $q=28$

$$q=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2\cdot 7^{n+1}}{2\cdot 7^n}=7^{n+1-n}=7$$

ODP: B

Zadanie 20. (*1 pkt*)

Równanie $(x+6)^2 + y^2 = 4$ opisuje okrąg o środku w punkcie S i promieniu r. Wówczas:

A. $S=(-6,0)$, $r=4$ **B.** $S=(6,0)$, $r=4$ **C.** $S=(6,0)$, $r=2$ **D.** $S=(-6,0)$, $r=2$

Współrzędne środka muszą wyzerować lewą stronę naszego równania, a aby znaleźć promień należy wyciągnąć pierwiastek z 4

ODP: D

Zadanie 21. (*1 pkt*)

Długość promienia r okręgu opisanego na kwadracie jest równa $2\sqrt{3}$. Długość boku tego kwadratu ma wartość:

A. $4\sqrt{3}$ **B.** $2\sqrt{6}$ **C.** $4\sqrt{6}$ **D.** $2\sqrt{5}$

Promień okręgu jest połową przekątnej, zatem:

$$d = 4\sqrt{3}$$

$$4\sqrt{3} = a\sqrt{2}$$

$$a = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6}$$

ODP: B

Zadanie 22. (*1 pkt*)

W turnieju szachowym, rozgrywanym systemem każdy z każdym, bez rewanżu, miało brać udział 8 zawodników. Jeden z nich zrezygnował. Liczba zaplanowanych rozgrywek zmniejszyła się o:

A. 1 **B.** 14 **C.** 7 **D.** 8

Liczba partii dla 8 osób

$$\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

Liczba partii dla 7 osób

$$\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

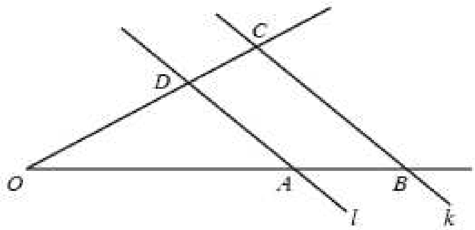
$$28 - 21 = 7$$

ODP: C

Zadanie 23. (*1 pkt*)

Proste l i k są równoległe oraz $|OA| = 6$, $|AB| = 10$, $|OC| = 48$. Odcinek OD ma długość:

A. 12 **B.** 18 **C.** $\frac{18}{5}$ **D.** $\frac{144}{5}$



Z tw. Talesa mamy (OD to szukana, oznaczono ją jako x)

$$\frac{x}{6} = \frac{48}{10+6}$$
$$16x = 48 \cdot 6$$
$$x = 18$$

ODP: B

Zadanie 24. (*2 pkt*)

W ciągu arytmetycznym (a_n) drugi wyraz jest równy 7, a szósty 17. Wyznacz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

Korzystamy z zależności na ciąg arytmetyczny:

$$a_2 + 4r = a_6$$
$$7 + 4r = 17$$
$$4r = 10$$
$$r = 2{,}5$$
$$a_1 = a_2 - r = 7 - 2{,}5 = 4{,}5$$

ODP: Wyraz pierwszy wynosi 4,5, a różnica jest równa 2,5

Zadanie 25. (*2 pkt*)

Średni wzrost sportowców w drużynie siatkarskiej, liczącej 6 chłopców, wynosił 174 cm. Po przyjęciu do zespołu dwóch braci o tej samej wysokości średnia wzrostu zwiększyła się o 0,5 cm. Oblicz, jak wysocy są bracia.

Obliczamy sumę wzrostu dotychczasowych graczy, dodajemy do tego wzrost nowych członków drużyny, pamiętamy, że zmienia się ilość graczy, po dojściu dwóch braci ilość graczy wynosi 8

$$\frac{6\cdot 174+2x}{6+2}=174{,}5$$

$$\frac{1044+2x}{8}=174{,}5$$

$$1044+2x=1396$$

$$2x=352$$

$$x=176cm$$

ODP: Bracia mają po 176cm wzrostu.

Zadanie 26. (*2 pkt*)

Rozwiąż równanie $2x^3+8x^2-3x-12=0$.

Rozkładamy na czynniki metodą grupowania wyrazów, a później przyrównujemy każdy z nawiasów do zera:

$$2x^3+8x^2-3x-12=0$$

$$2x^2(x+4)-3(x+4)=0$$

$$(x+4)\cdot(2x^2-3)=0$$

$$(x+4)\cdot(\sqrt{2}x-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{2}x+\sqrt{3})=0$$

$$ODP: x=-4,\ \text{lub}\ \ x=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Zadanie 27. (*2 pkt*)

Rozwiąż nierówność $x^2-9>0$.

Przenosimy 9 na prawo, i pierwiastkujemy obustronnie daną nierówność, pamiętamy o module!!

$$x^2-9>0$$

$$x^2>9$$

$$|x|>3$$

$$x>3\ \ \text{lub}\ \ x<-3$$

$$ODP: x\in(-\infty,-3)\,U\,(3,+\infty)$$

Zadanie 28. (*2 pkt*)

Dana jest liczba $a=\sqrt{\left(2-2\sqrt{5}\right)^2}-2\sqrt{5}$. Wykaż, że liczba a jest całkowita.

Podobnie jak w poprzednim zadaniu musimy pamiętać o module!! Wartość bezwzględna jest ujemna, zatem należy zmienić oba znaki!

$$a=\sqrt{(2-2\sqrt{5})^2}-2\sqrt{5}=\left|2-2\sqrt{5}\right|-2\sqrt{5}=-2+2\sqrt{5}-2\sqrt{5}=-2\in C$$

Zadanie 29. (*2 pkt*)

Długość krawędzi sześcianu zwiększono o 20%. Oblicz, o ile procent wzrosła objętość tego sześcianu.

$V_1 = a^3$

$V_2 = (1{,}2a)^3 = 1{,}728a^3$

ODP: Wzrośnie o 72,8%

Zadanie 30. (*5 pkt*)

Prosta $y = x + 4$ przecina okrąg o równaniu $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$ w punktach A i B. Oblicz współrzędne punktów A i B, a następnie oblicz obwód trójkąta ABS, gdzie S jest środkiem danego okręgu.

Wstawiamy za y w podanym równaniu okręgu prostą y=x+4

$$(x+1)^2 + (x+4-2)^2 = 25$$
$$x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 - 25 = 0$$
$$2x^2 + 6x - 20 = 0$$
$$x^2 + 3x - 10 = 0$$
$$\Delta = 9 + 40 = 49$$
$$x_1 = \frac{-3-7}{2} = -5,\ y_1 = -5 + 4 = -1$$
$$x_2 = \frac{-3+7}{2} = 2,\ y_2 = 2 + 4 = 6$$
$$S = (-1, 2)$$

$$|AS| = \sqrt{(-5+1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$
$$|BS| = \sqrt{(2+1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$
$$|ABS| = \sqrt{(-5-2)^2 + (-1-6)^2} = \sqrt{49+49} = 7\sqrt{2}$$
$$ODP: Obw = 10 + 7\sqrt{2}$$

Zadanie 31. (*5 pkt*)

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe 24, a kąt płaski ściany bocznej przy podstawie ma miarę α i $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Wyznacz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.

Skoro tangens kąta płaskiego ściany bocznej przy podstawie wynosi 2, to wynika z tego, że zarówno wysokość ściany bocznej jak i podstawa, na którą opada ta wysokość mają długość 2x, policzmy ile wynosi x:

$P_b = \frac{3ah}{2}$

$24 = \frac{3 \cdot 2x \cdot 2x}{2}$

$24 = 6x^2$

$x^2 = 4$

$x = 2$

$a = 2x = 4$

h – wysokość podstawy

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$h = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

$\frac{1}{3}h = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

$ODP: \cos\alpha = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Zadanie 32. (*5 pkt*)

Turysta pokonał pieszo trasę długości 30 km z miejscowości *A* do miejscowości *B* ze stałą prędkością. Rowerem poruszałby się z prędkością o 9 km/h większą i przybyłby do celu o 3 godziny wcześniej. Wyznacz prędkość marszu turysty i czas przejścia tej drogi.

t- czas
v- prędkość

$vt = 30 \Rightarrow v = \frac{30}{t}$

$(v+9)(t-3) = 30$

$vt - 3v + 9t - 27 = 30$

$30 - \frac{90}{t} + 9t - 27 = 30$

$-\frac{90}{t} + 9t - 27 = 0$

$9t^2 - 27t - 90 = 0$

$t^2 - 3t - 10 = 0$

$\Delta = 9 + 40 = 49$

$t_1 = \frac{3-7}{2} = -2 \notin D$

$t_1 = \frac{3+7}{2} = 5h \in D$

$v = \frac{30}{5} = 6km/h$

ODP: Turysta maszerował z prędkością 6km/h, jego czas spaceru to 5h.