

**Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych
i schemat oceniania zadań otwartych**

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	C	D	A	A	B	D	C	C	D	B	C	A	B	B	D	B	C	A	A

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 21. (2pkt)

Rozwiąż nierówność $-2x^2 + 3x + 2 \leq 0$.

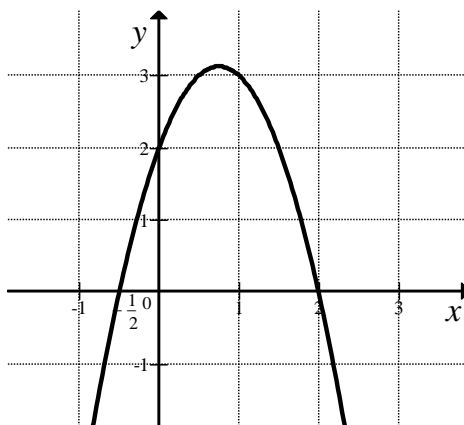
Rozwiązanie

Obliczamy wyróżnik i pierwiastki trójmianu kwadratowego $-2x^2 + 3x + 2$

$$\Delta = 9 - 4 \cdot (-2) \cdot 2 = 25, \sqrt{\Delta} = 5,$$

$$x_1 = \frac{-3-5}{-4} = 2, x_2 = \frac{-3+5}{-4} = -\frac{1}{2}.$$

Szkicujemy wykres trójmianu kwadratowego $y = -2x^2 + 3x + 2$,



z którego odczytujemy zbiór rozwiązań rozwiązywanej nierówności

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(2, +\infty\right).$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje1 pkt
gdy:

- obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności
albo
- rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $-2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności
albo
- zapisze nierówność w postaci równoważnej $\left|x-\frac{3}{4}\right| \geq \frac{5}{4}$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności
albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność

albo

- błędnie przekształci nierówność do postaci równoważnej, np. zapisze $\left|x - \frac{3}{4}\right| \leq \frac{5}{4}$

i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy:

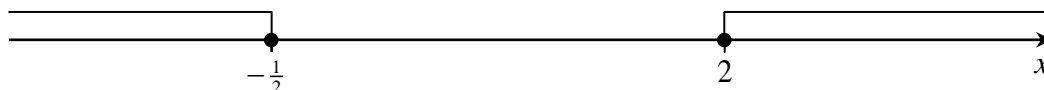
- poda zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup \langle 2, +\infty)$ lub $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup \langle 2, +\infty)$ lub $(x \leq -\frac{1}{2} \text{ lub } x \geq 2)$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x \leq -\frac{1}{2}, x \geq 2$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.



Zadanie 22. (2 pkt)

Oblicz największą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = -2x^2 + 16x - 15$ w przedziale $\langle -2, 3 \rangle$.

Rozwiązanie

Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f jest równa

$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{16}{2 \cdot (-2)} = 4.$$

Stąd i z ujemnego znaku współczynnika stojącego przy x^2 wnioskujemy, że w przedziale $\langle -2, 3 \rangle$ funkcja f jest rosnąca. Zatem największa wartość funkcji f w tym przedziale jest równa

$$f(3) = -2 \cdot 3^2 + 16 \cdot 3 - 15 = -18 + 48 - 15 = 15.$$

Odpowiedź: Największa wartość funkcji f w przedziale $\langle -2, 3 \rangle$ jest równa 15.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje1 pkt

gdy:

- obliczy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f
- albo
- zapisze wzór funkcji f w postaci kanonicznej i stwierdzi, że w przedziale $\langle -2, 3 \rangle$ funkcja jest rosnąca (wystarczy, że stwierdzi, że jest monotoniczna, o ile w dalszej części rozwiązania oblicza wartości na obu krańcach przedziału $\langle -2, 3 \rangle$)

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

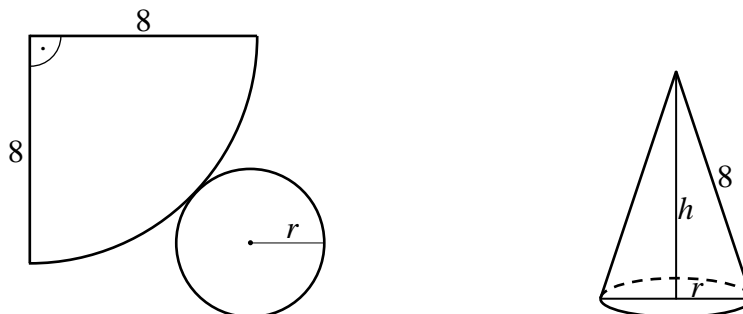
Zdający otrzymuje2 pkt

gdy obliczy największą wartość funkcji w przedziale $\langle -2, 3 \rangle$: 15.

Zadanie 23. (2pkt)

Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu na płaszczyznę jest ćwiartką koła o promieniu 8 cm. Oblicz wysokość tego stożka.

Rozwiązanie



Ponieważ powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu na płaszczyznę jest ćwiartką koła o promieniu 8 cm, więc pole powierzchni bocznej stożka jest równe $\frac{1}{4} \pi \cdot 8^2 = 16\pi$.

Zatem ze wzoru na pole powierzchni bocznej stożka otrzymujemy $\pi r \cdot 8 = 16\pi$. Stąd $r = 2$.

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $h = \sqrt{8^2 - r^2} = \sqrt{8^2 - 2^2} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$.

Odpowiedź: Wysokość stożka jest równa $2\sqrt{15}$ cm.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje1 pkt
 gdy zapisze związek pozwalający obliczyć promień podstawy stożka, np. wykorzysta wzór na pole powierzchni bocznej stożka i zapisze równanie $\pi r \cdot 8 = \frac{1}{4} \pi \cdot 8^2$.

Zdający otrzymuje2 pkt
 gdy obliczy wysokość stożka: $h = 2\sqrt{15}$.

Zadanie 24. (2pkt)

Ciąg (a_n) jest określony dla $n \geq 1$ wzorem $a_n = -n^2 - 4\sqrt{3}$. Sprawdź, którym wyrazem tego ciągu jest liczba $-3^2 - (2 + \sqrt{3})^2$.

Rozwiązanie

Po zastosowaniu wzoru na kwadrat sumy i wykonaniu redukcji otrzymujemy

$$-3^2 - (2 + \sqrt{3})^2 = -9 - (4 + 4\sqrt{3} + 3) = -16 - 4\sqrt{3} = -4^2 - 4\sqrt{3}.$$

Zatem liczba $-3^2 - (2 + \sqrt{3})^2$ jest czwartym wyrazem ciągu (a_n) .

Odpowiedź: $-3^2 - (2 + \sqrt{3})^2 = a_4$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje1 pkt
 gdy poprawnie zastosuje wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy: $-3^2 - (2 + \sqrt{3})^2 = -9 - (4 + 4\sqrt{3} + 3)$.

Zdający otrzymuje2 pkt
 gdy doprowadzi wyrażenie $-3^2 - (2 + \sqrt{3})^2$ do postaci $-16 - 4\sqrt{3}$ i zapisze, że

$$-3^2 - (2 + \sqrt{3})^2 = a_4.$$

Zadanie 25. (2pkt)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z takich, że $x + y + z = 3$ prawdziwa jest nierówność $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$.

Dowód

I sposób rozwiązania

Z założenia $x + y + z = 3$ otrzymujemy $z = 3 - (x + y)$. Wobec tego tezę możemy zapisać w sposób równoważny

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (3 - (x + y))^2 &\geq 3, \\ x^2 + y^2 + 9 - 6(x + y) + (x + y)^2 &\geq 3, \\ x^2 + y^2 + 9 - 6x - 6y + x^2 + 2xy + y^2 &\geq 3, \\ 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x - 6y + 6 &\geq 0 \\ x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 3 &\geq 0, \\ x^2 + (y - 3)x + (y^2 - 3y + 3) &\geq 0. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób nierówność kwadratową z niewiadomą x . Wyróżnik trójmianu stojącego po lewej stronie tej nierówności jest równy

$$\begin{aligned} \Delta &= (y - 3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (y^2 - 3y + 3) = y^2 - 6y + 9 - 4y^2 + 12y - 12 = \\ &= -3y^2 + 6y - 3 = -3(y^2 - 2y + 1) = -3(y - 1)^2 \leq 0 \text{ dla każdej } y \in R. \end{aligned}$$

To, wraz z dodatnim współczynnikiem przy x^2 oznacza, że nierówność kwadratowa jest prawdziwa dla dowolnej liczby $x \in R$.

Uwaga

Prawdziwość otrzymanej nierówności $x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 3 \geq 0$ możemy też udowodnić zapisując ją w postaci równoważnej jej nierówności prawdziwej w sposób oczywisty.

Pokażemy dwa takie sposoby:

a)

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 3 &\geq 0, \\ (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + xy - x - y + 1 &\geq 0, \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + x(y - 1) - (y - 1) &\geq 0, \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - 1)(y - 1) &\geq 0, \\ (x - 1)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x - 1)(y - 1) + \frac{1}{4} \cdot (y - 1)^2 + \frac{3}{4} \cdot (y - 1)^2 &\geq 0, \\ \left((x - 1) + \frac{1}{2}(y - 1) \right)^2 + \frac{3}{4} \cdot (y - 1)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Nierówność ta jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y .

b)

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - 1)(y - 1) &\geq 0, \\ \frac{1}{2}(x - 1)^2 + (x - 1)(y - 1) + \frac{1}{2}(y - 1)^2 + \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{2}(y - 1)^2 &\geq 0, \\ \frac{1}{2} \left((x - 1)^2 + 2(x - 1)(y - 1) + (y - 1)^2 \right) + \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{2}(y - 1)^2 &\geq 0 \\ \frac{1}{2}(x - 1 + y - 1)^2 + \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{2}(y - 1)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Podobnie jak poprzednio uzyskujemy nierówność prawdziwą w sposób oczywisty.

II sposób rozwiązania

Podstawiając $x = a+1$, $y = b+1$, $z = c+1$ możemy zapisać założenie w postaci $(a+1)+(b+1)+(c+1)=3$, czyli $a+b+c=0$, zaś tezę możemy zapisać w sposób równoważny w postaci kolejno:

$$(a+1)^2 + (b+1)^2 + (c+1)^2 \geq 3,$$

$$a^2 + 2a + b^2 + 2b + c^2 + 2c \geq 0,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq -2(a+b+c).$$

Ostatnia nierówność jest, wobec założenia $a+b+c=0$, równoważna nierówności

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 0,$$

która jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych.

III sposób rozwiązania

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z prawdziwe są nierówności

$$(x-y)^2 \geq 0,$$

$$(y-z)^2 \geq 0,$$

$$(z-x)^2 \geq 0,$$

czyli

$$x^2 + y^2 \geq 2xy,$$

$$y^2 + z^2 \geq 2yz,$$

$$z^2 + x^2 \geq 2zx.$$

Dodając te nierówności stronami otrzymujemy

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx.$$

Ponieważ z założenia $x+y+z=3$, więc

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 9.$$

Stąd

$$2xy + 2yz + 2zx = 9 - (x^2 + y^2 + z^2).$$

Otrzymujemy zatem

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 9 - (x^2 + y^2 + z^2),$$

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 \geq 9,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 3,$$

co należało udowodnić.

IV sposób rozwiązania

Dla liczb nieujemnych x, y, z prawdziwa jest nierówność między średnią arytmetyczną i średnią kwadratową

$$\frac{x+y+z}{3} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}.$$

Jeżeli natomiast któraś z liczb x, y, z jest ujemna, to ta nierówność również jest prawdziwa.

Stąd i z założenia, że $x+y+z=3$ dostajemy

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq 1.$$

Podnosząc obie strony te nierówności do kwadratu, a następnie mnożąc je przez 3 dostajemy tezę.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje1 pkt
 gdy

- zapisze nierówność w postaci równoważnej jej nierówności kwadratowej $x^2 + (y-3)x + (y^2 - 3y + 3) \geq 0$ i zapisze, że otrzymana nierówność to nierówność kwadratowa lub obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego $x^2 + (y-3)x + (y^2 - 3y + 3)$

albo

- zapisze nierówność w postaci równoważnej $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-1)(y-1) \geq 0$

albo

- zastosuje podstawienie $x = a+1$, $y = b+1$, $z = c+1$ i zapisze założenie w postaci $a+b+c=0$ oraz tezę w postaci $(a+1)^2 + (b+1)^2 + (c+1)^2 \geq 3$

albo

- zapisze równość $2xy + 2yz + 2zx = 9 - (x^2 + y^2 + z^2)$ wynikająca z założenia oraz wykaże prawdziwość nierówności $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx$ (wystarczy, że powoła się na znaną nierówność, prawdziwą dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z)

albo

- zastosuje nierówność między średnią arytmetyczną i średnią kwadratową i zapisze nierówność $\frac{x+y+z}{3} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$ (nawet bez rozpatrywania znaków liczb x, y, z)

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

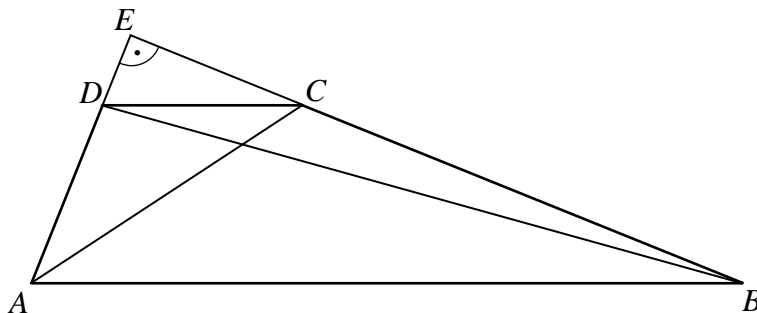
Zdający otrzymuje2 pkt
 gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 26. (2pkt)

Wykaż, że jeżeli ramiona AD i BC trapezu $ABCD$ o podstawach AB i CD zawierają się w prostych prostopadłych (zobacz rysunek), to $|AB|^2 + |CD|^2 = |AC|^2 + |BD|^2$.

Rozwiązanie

Niech E oznacza punkt przecięcia prostych AD i BC (przyjeliśmy za rysunkiem, że $|AB| > |CD|$). Gdyby $|AB| < |CD|$, to punkt E leżałby po drugiej stronie prostej CD , zaś rozumowanie nie zmieniłoby się).



Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego kolejno do trójkątów ABE , DCE , ACE , BED otrzymujemy równości

- (1) $|AB|^2 = |AE|^2 + |BE|^2$,
(2) $|CD|^2 = |DE|^2 + |CE|^2$,
(3) $|AC|^2 = |AE|^2 + |CE|^2$,
(4) $|BD|^2 = |DE|^2 + |BE|^2$.

Zatem

$$\begin{aligned} |AB|^2 + |CD|^2 &\stackrel{(1),(2)}{=} (|AE|^2 + |BE|^2) + (|DE|^2 + |CE|^2) = \\ &= (|AE|^2 + |CE|^2) + (|DE|^2 + |BE|^2) \stackrel{(3),(4)}{=} |AC|^2 + |BD|^2. \end{aligned}$$

To kończy dowód.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje1 pkt

gdy zapisze równości wynikające z twierdzenia Pitagorasa pozwalające udowodnić tezę,

np.: $|AB|^2 = |AE|^2 + |BE|^2$, $|CD|^2 = |DE|^2 + |CE|^2$, $|AC|^2 = |AE|^2 + |CE|^2$, $|BD|^2 = |DE|^2 + |BE|^2$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 27. (4pkt)

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że otrzymamy liczbę spełniającą jednocześnie trzy następujące warunki:

- (1) liczba jest podzielna przez 25,
- (2) cyfry dziesiątek i setek są nieparzyste,
- (3) cyfra dziesiątek jest nie większa niż cyfra setek.

Rozwiązanie

Zdarzeniem elementarnym jest wylosowanie liczby naturalnej czterocyfrowej, więc zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych ma postać $\Omega = \{1000, 1001, 1002, \dots, 9999\}$. Liczba wszystkich liczb w tym zbiorze jest równa

$$|\Omega| = 9999 - 999 = 9000.$$

Niech A oznacza zdarzenie, że wylosowana liczba ze zbioru Ω spełnia jednocześnie warunki (1), (2) i (3). Liczba jest podzielna przez 25, więc jej dwucyfrowa końcówka to 00, 25, 50 lub 75. Ponieważ z (2) warunku wynika, że cyfra dziesiątek jest nieparzysta, więc końcówką może być jedynie 50 lub 75. Cyfra setek jest nieparzysta i cyfra dziesiątek jest od niej nie większa. Mamy zatem następujące trzycyfrowe końcówki liczby: 550, 750, 950, 775, 975. Cyfrą tysięcy jest dowolną cyfrą spośród dziewięciu cyfr: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Zatem

$$|A| = 9 \cdot 5.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest zatem równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{9 \cdot 5}{9000} = \frac{1}{200}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania1 pkt

- Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 9000$

albo

- poprawne rozpatrzenie jednego z podanych warunków, np. obliczenie liczby wszystkich końcówek dwucyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 25 lub ich wypisanie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2 pkt

- Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych oraz poprawne rozpatrzenie jednego z podanych warunków, np. obliczenie liczby wszystkich końcówek dwucyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 25 lub ich wypisanie

albo

- poprawne rozpatrzenie co najmniej dwóch warunków ale nie obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych lub obliczenie jej z błędem.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych oraz obliczenie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A : $|A| = 9 \cdot 5$.

Rozwiązanie pełne4 pkt

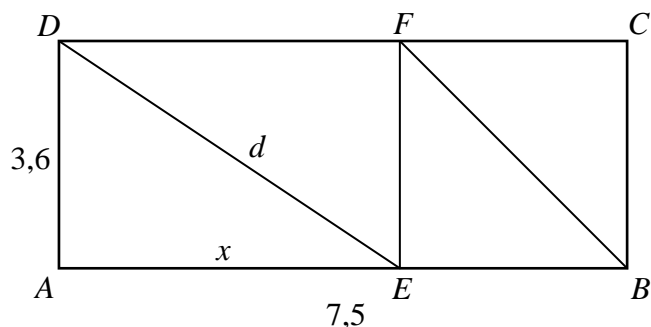
Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A : $P(A) = \frac{1}{200}$.

Zadanie 28. (5pkt)

Prostokątny pas wykładziny dywanowej o wymiarach 3,6 m na 7,5 m należy przeciąć prostopadle do dłuższego boku tak, aby przekątne otrzymanych dwóch prostokątnych kawałków różniły się o 1,5 m. Oblicz wymiary większego z otrzymanych kawałków.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez x nieznanymi wymiary większego z kawałków. Przekątna tego kawałka jest dłuższa od przekątnej mniejszego z kawałków.



Nieznanymi wymiary mniejszego kawałka i długość przekątnej tego kawałka są równe odpowiednio

$$|EB| = 7,5 - x, \quad |FB| = d - 1,5.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AED i dla trójkąta EBF otrzymujemy

$$|DE|^2 = |AE|^2 + |AD|^2 \quad \text{oraz} \quad |FB|^2 = |EB|^2 + |EF|^2,$$

$$d^2 = 3,6^2 + x^2 \quad \text{oraz} \quad (d - 1,5)^2 = (7,5 - x)^2 + 3,6^2.$$

Drugie równanie zapisujemy w postaci

$$d^2 - 3d + 2,25 = 56,25 - 15x + x^2 + 3,6^2.$$

Stąd i z pierwszego równania mamy

$$d^2 - 3d + 2,25 = 56,25 - 15x + d^2,$$

$$15x - 3d = 54,$$

$$5x - d = 18,$$

$$d = 5x - 18.$$

Podstawiając w miejsce d w pierwszym równaniu $5x - 18$ otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą

$$(5x - 18)^2 = 3,6^2 + x^2,$$

$$25x^2 - 180x + 324 = 12,96 + x^2,$$

$$24x^2 - 180x + 311,04 = 0.$$

$$\Delta = (-180)^2 - 4 \cdot 24 \cdot 311,04 = 180 \cdot 180 - 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 311,04 =$$

$$= 4 \cdot 45 \cdot 4 \cdot 45 - 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 311,04 = 16 \cdot (45 \cdot 45 - 6 \cdot 311,04) = 16 \cdot 158,76,$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{158,76} = 4 \cdot 12,6 = 50,4$$

$$x = \frac{180 - 50,4}{48} = \frac{129,6}{48} = 2,7 \quad \text{lub} \quad x = \frac{180 + 50,4}{48} = \frac{230,4}{48} = 4,8.$$

Pierwsze z otrzymanych rozwiązań nie spełnia warunków zadania, gdyż wówczas mielibyśmy $d = 5x - 18 = 5 \cdot 2,7 - 18 = -4,5 < 0$.

Zatem wymiary większego z otrzymanych kawałków są równe 3,6 m na 4,8 m.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Przyjęcie oznaczeń i zapisanie jednego z równań wynikających z treści zadania, np.:

$d^2 = 3,6^2 + x^2$, gdzie x oznacza nieznaną wymiar większego z kawałków, zaś d długość przekątnej tego kawałka.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2 pkt

Zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć wymiary większego z kawałków, np.:

$$\begin{cases} d^2 = 3,6^2 + x^2 \\ (d - 1,5)^2 = 3,6^2 + (7,5 - x)^2 \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

Doprowadzenie układu do równania z jedną niewiadomą (x albo d), np.: $(5x - 18)^2 = 3,6^2 + x^2$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)4 pkt

Doprowadzenie do równania kwadratowego z jedną niewiadomą (x albo d), np.:

$$24x^2 - 180x + 311,04 = 0.$$

Rozwiązanie bezbłędne5 pkt

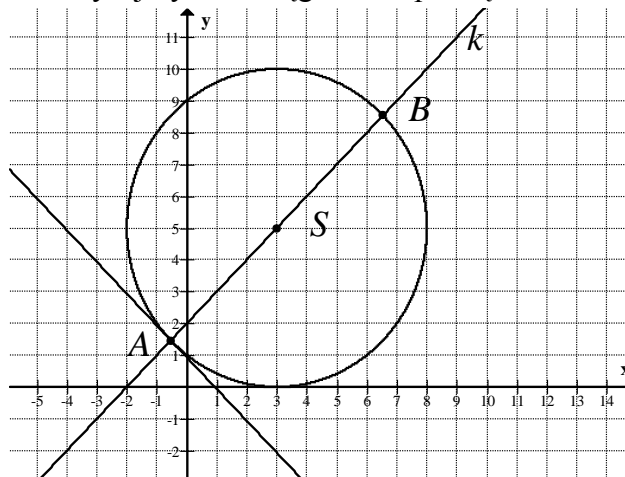
Obliczenie nieznanego wymiaru większego kawałka: 4,8 m.

Zadanie 29. (4pkt)

Prosta o równaniu $y = x + 2$ przecina okrąg o równaniu $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$ w punktach A i B . Oblicz współrzędne punktów A i B oraz wyznacz równanie stycznej do danego okręgu, przechodzącej przez jeden z tych punktów.

Rozwiązanie

Środkiem okręgu o równaniu $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$ jest punkt $S = (3, 5)$, a promień tego okręgu jest równy $r = 5$. Narysujmy ten okrąg wraz z prostą k o równaniu $y = x + 2$.



Współrzędne punktów przecięcia prostej k z okręgiem obliczymy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-5)^2 = 25 \\ y = x+2 \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy równanie

$$(x-3)^2 + (x+2-5)^2 = 25,$$

$$(x-3)^2 + (x-3)^2 = 25,$$

$$2(x-3)^2 - 25 = 0,$$

$$(x-3)^2 - \frac{25}{2} = 0,$$

$$\left(x-3-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)\left(x-3+\frac{5}{\sqrt{2}}\right) = 0,$$

$$x = 3 + \frac{5}{\sqrt{2}} \text{ lub } x = 3 - \frac{5}{\sqrt{2}}$$

Gdy $x = 3 + \frac{5}{\sqrt{2}}$, to wtedy $y = x + 2 = 5 + \frac{5}{\sqrt{2}}$, a gdy $x = 3 - \frac{5}{\sqrt{2}}$, to wówczas $y = x + 2 = 5 - \frac{5}{\sqrt{2}}$.

Zatem prosta k przecina okrąg w punktach

$$A = \left(3 - \frac{5}{\sqrt{2}}, 5 - \frac{5}{\sqrt{2}}\right), B = \left(3 + \frac{5}{\sqrt{2}}, 5 + \frac{5}{\sqrt{2}}\right).$$

Zauważmy, że środek S okręgu leży na prostej k , gdyż $3 + 2 = 5$. Oznacza to, że styczna do okręgu przechodząca przez punkt A lub przez punkt B jest prostopadła do prostej k . Równanie stycznej do okręgu przechodzącej przez A ma zatem postać

$$y = -\left(x - \left(3 - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)\right) + 5 - \frac{5}{\sqrt{2}}, \text{ czyli } y = -x + 8 - 5\sqrt{2}.$$

Równanie stycznej do okręgu przechodzącej przez B ma postać

$$y = -\left(x - \left(3 + \frac{5}{\sqrt{2}}\right)\right) + 5 + \frac{5}{\sqrt{2}}, \text{ czyli } y = -x + 8 + 5\sqrt{2}.$$

Odpowiedź. $A = \left(3 - \frac{5}{\sqrt{2}}, 5 - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$, $B = \left(3 + \frac{5}{\sqrt{2}}, 5 + \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$, styczna do danego okręgu

poprowadzona przez punkt A ma równanie $y = -x + 8 - 5\sqrt{2}$, a styczna poprowadzona przez punkt B ma równanie $y = -x + 8 + 5\sqrt{2}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Doprowadzenie układu równań $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$ i $y = x + 2$ do równania kwadratowego z jedną niewiadomą, np.: $(x-3)^2 + (x+2-5)^2 = 25$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2 pkt

Rozwiązanie układu równań i zapisanie współrzędnych punktów A i B :

$$A = \left(3 - \frac{5}{\sqrt{2}}, 5 - \frac{5}{\sqrt{2}}\right), B = \left(3 + \frac{5}{\sqrt{2}}, 5 + \frac{5}{\sqrt{2}}\right).$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

Obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej do danego okręgu przechodzącej przez punkt A lub przez punkt B : -1 .

Rozwiązanie pełne4 pkt

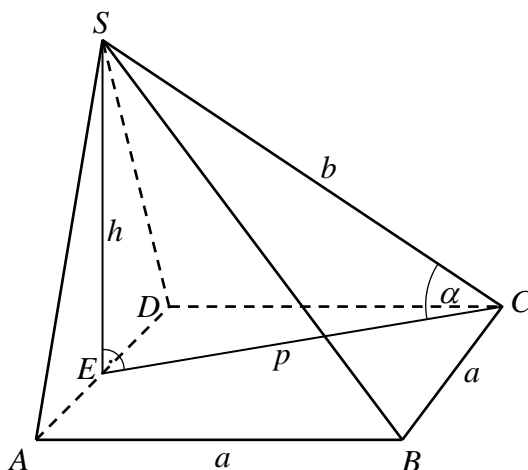
Wyznaczenie równania stycznej do danego okręgu przechodzącej przez punkt A (lub przez punkt B): $y = -x + 8 - 5\sqrt{2}$ (lub $y = -x + 8 + 5\sqrt{2}$).

Zadanie 30. (5pkt)

Podstawą ostrosłupa $ABCD S$ jest kwadrat $ABCD$. Wysokość SE ściany bocznej ADS jest jednocześnie wysokością ostrosłupa, a punkt E jest środkiem krawędzi AD (zobacz rysunek). Pole ściany ADS jest równe 12 cm^2 , a objętość ostrosłupa jest równa 48 cm^3 . Oblicz miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej CS do płaszczyzny podstawy ostrosłupa. Wynik zaokrąglij do 1° .

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Zaznaczmy też kąt α między krawędzią boczną CS ostrosłupa a płaszczyzną jego podstawy. Jest to kąt ostry w trójkącie prostokątnym ECS o kącie prostym przy wierzchołku E .



Pole ściany bocznej ADS jest równe 12, więc możemy zapisać równanie

$$\frac{1}{2}ah = 12.$$

Wykorzystując podaną objętość ostrosłupa zapisujemy drugie równanie z tymi samymi niewiadomymi a i h

$$\frac{1}{3}a^2h = 48.$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $ah = 24$, więc stąd i z drugiego równania dostajemy

$$\frac{1}{3} \cdot a \cdot 24 = 48,$$

$$a = 6.$$

Zatem $6h = 24$, czyli $h = 4$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego EDC otrzymujemy

$$|EC|^2 = |ED|^2 + |CD|^2,$$

$$p^2 = 3^2 + 6^2 = 45.$$

Stąd $p = 3\sqrt{5}$.

Obliczmy tangens kąta α w trójkącie ECS

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{p} = \frac{4}{3\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{15} \approx 0,5963.$$

Z tablic odczytujemy miarę kąta α zaokrągloną do 1°

$$\alpha \approx 31^\circ.$$

Odpowiedź: $\alpha \approx 31^\circ$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zapisanie jednego z równań: $\frac{1}{2}ah = 12$, $\frac{1}{3}a^2h = 48$, gdzie a oznacza długość krawędzi

podstawy ostrosłupa, zaś h wysokość ostrosłupa i jednocześnie wysokość ściany bocznej ADS .

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2 pkt

Zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć długość krawędzi podstawy ostrosłupa oraz

wysokość ostrosłupa: $\frac{1}{2}ah = 12$ oraz $\frac{1}{3}a^2h = 48$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

Zaznaczenie kąta nachylenia krawędzi bocznej CS do płaszczyzny podstawy ostrosłupa oraz obliczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa i wysokości ostrosłupa: $a = 6$, $h = 4$.

Uwaga

Jeżeli zdający zaznaczy zły kąt nachylenia krawędzi bocznej CS do płaszczyzny podstawy ostrosłupa, to za całe rozwiązanie zadania może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)4 pkt

- Obliczenie wartości funkcji trygonometrycznej kąta α i błędne odczytanie miary kąta albo
- obliczenie wartości funkcji trygonometrycznej kąta α z błędem rachunkowym i konsekwentne podanie miary kąta α .

Rozwiązanie bezbłędne5 pkt

Odczytanie miary kąta α : $\alpha \approx 31^\circ$.