Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych
i schemat oceniania zadań otwartych

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	**D**	**D**	**B**	**C**	**B**	**B**	**A**	**A**	**A**	**D**	**C**	**D**	**C**	**D**	**B**	**A**	**C**	**A**	**C**

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 21. ***(2pkt)***

Rozwiąż nierówność $-2x^2+\frac{1}{2}x\geq 0$.

Rozwiązanie

Obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $-2x^2+\frac{1}{2}x$ rozkładając go na czynniki liniowe

$$-2x^2+\frac{1}{2}x=-2x\left(x-\frac{1}{4}\right).$$

Stąd

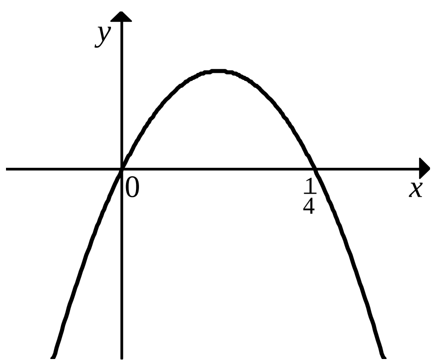
$$x_1=0,\ x_2=\frac{1}{4}.$$

Możemy również obliczyć pierwiastki wykorzystując wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego. Wówczas

$$\Delta=\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot(-2)\cdot 0=\frac{1}{4},\ \sqrt{\Delta}=\frac{1}{2},$$

$$x_1=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{2\cdot(-2)}=\frac{1}{4},\ x_2=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2\cdot(-2)}=0$$

Szkicujemy wykres trójmianu kwadratowego $y=-2x^2+\frac{1}{2}x$,



z którego odczytujemy zbiór rozwiązań rozwiązywanej nierówności

$$x\in\left\langle 0,\frac{1}{4}\right\rangle.$$

Odpowiedź: $x\in\left\langle 0,\frac{1}{4}\right\rangle$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy:

- obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{4}$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $-2x\left(x-\frac{1}{4}\right)$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- zapisze nierówność w postaci równoważnej $\left|x-\frac{1}{8}\right| \le \frac{1}{8}$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność

albo

- błędnie przekształci nierówność do postaci równoważnej, np. zapisze $\left|x+\frac{1}{8}\right| \le \frac{1}{8}$ i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy:

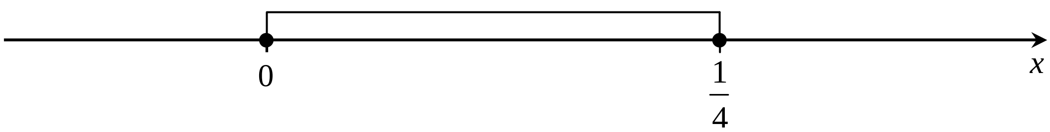
- poda zbiór rozwiązań nierówności: $\left\langle 0, \frac{1}{4} \right\rangle$ lub $x \in \left\langle 0, \frac{1}{4} \right\rangle$ lub ($x \ge 0$ i $x \le \frac{1}{4}$)

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x \ge 0$, $x \le \frac{1}{4}$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.



Zadanie 22. ***(2 pkt)***

Punkty $A = (-3, 4)$ i $C = (1, 3)$ są wierzchołkami kwadratu *ABCD*. Wyznacz równanie prostej zawierającej przekątną BD tego kwadratu.

Rozwiązanie

Przekątne kwadratu są prostopadłe i połowią się, więc prosta *BD* jest prostopadła do prostej *AC* i przechodzi przez środek *S* odcinka *AC*.
Współczynnik kierunkowy prostej *AC* jest równy

$$a_{AC} = \frac{3-4}{1-(-3)} = -\frac{1}{4},$$

więc współczynnik kierunkowy prostej *BD* jest równy

$$a_{BD} = -\frac{1}{a_{AC}} = 4.$$

Środek S odcinka AC ma współrzędne

$$S = \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right) = \left(\frac{-3+1}{2}, \frac{4+3}{2}\right) = \left(-1, \frac{7}{2}\right).$$

Zatem prosta BD ma równanie postaci

$$y = 4\left(x - (-1)\right) + \frac{7}{2}, \text{ czyli } y = 4x + \frac{15}{2}.$$

Odpowiedź: Prosta BD ma równanie postaci $y = 4x + \frac{15}{2}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy:

- obliczy współrzędne środka odcinka AC i współczynnik kierunkowy prostej AC:
  $S = \left(-1, \frac{7}{2}\right)$, $a_{AC} = -\frac{1}{4}$

albo

- obliczy współczynnik kierunkowy prostej AC i współczynnik kierunkowy prostej BD:
  $a_{AC} = -\frac{1}{4}$, $a_{BD} = 4$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy wyznaczy równanie prostej BD: $y = 4x + \frac{15}{2}$.

Zadanie 23. ***(2pkt)***

Kąty ostre α i β trójkąta prostokątnego spełniają warunek $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \mathrm{tg}^2\alpha = 4$. Wyznacz miarę kąta α.

Rozwiązanie

Ponieważ $\beta = 90° - \alpha$, więc $\sin\beta = \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$. Zatem równość $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \mathrm{tg}^2\alpha = 4$ możemy zapisać w postaci

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha = 4.$$

Stąd i z „jedynki trygonometrycznej” otrzymujemy

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = 4,$$
$$\mathrm{tg}^2\alpha = 3,$$

więc $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{3}$, gdyż α jest kątem ostrym. Stąd $\alpha = 60°$.

Odpowiedź: Miara kąta α jest równa $60°$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy obliczy wartość kwadratu tangensa kąta α i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy: $\mathrm{tg}^2\alpha = 3$.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy miarę kąta α: $\alpha = 60°$.

Zadanie 24. *(2pkt)*
Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych *x*, *y* prawdziwa jest nierówność

$$x^2 + xy + y^2 \geq 2x + 2y - 4 .$$

Dowód (I sposób)
Nierówność możemy zapisać w postaci równoważnej

$$x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 4 \geq 0 ,$$

$$x^2 + (y-2)x + y^2 - 2y + 4 \geq 0 .$$

Możemy potraktować tę nierówność jak nierówność kwadratową z niewiadomą *x*. Ponieważ współczynnik przy x^2 jest dodatni, więc wystarczy wykazać, że wyróżnik trójmianu stojącego po lewej stronie nierówności jest niedodatni dla dowolnej liczby rzeczywistej *y*, czyli

$$\Delta \leq 0 ,$$

$$(y-2)^2 - 4\cdot 1\cdot (y^2 - 2y + 4) \leq 0 ,$$

$$y^2 - 4y + 4 - 4y^2 + 8y - 16 \leq 0 ,$$

$$-3y^2 + 4y - 12 \leq 0 .$$

Obliczmy wyróżnik trójmianu $-3y^2 + 4y - 12$

$$\Delta_y = 4^2 - 4\cdot(-3)\cdot(-12) = 4^2 - 4\cdot 3\cdot 12 = -128 .$$

Ponieważ wyróżnik ten jest ujemny i współczynnik przy y^2 jest ujemny, więc nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej *y*. To kończy dowód.

Dowód (II sposób)
Nierówność możemy zapisać w postaci równoważnej

$$x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 4 \geq 0 .$$

Mnożąc obie strony nierówności przez 2 otrzymujemy

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x - 4y + 8 \geq 0 .$$

Tę nierówność możemy zapisać w postaci równoważnej

$$x^2 + x^2 + 2xy + y^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 \geq 0 ,$$

$$x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 \geq 0 ,$$

$$(x+y)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 \geq 0 .$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych *x*, *y*, gdyż kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemny, a suma trzech liczb nieujemnych jest nieujemna. To kończy dowód.

Schemat oceniania
Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy

- zapisze nierówność w postaci równoważnej $x^2 + (y-2)x + y^2 - 2y + 4 \geq 0$ i potraktuje tę nierówność jak nierówność kwadratową z niewiadomą *x*, np. zapisze wyróżnik $\Delta = (y-2)^2 - 4\cdot 1\cdot (y^2 - 2y + 4)$

albo

- zapisze nierówność w postaci równoważnej $(x+y)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 \geq 0$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 25. *(2pkt)*
Rozwiąż równanie $2x^3+3x^2+4x+6=0$.

I sposób rozwiązania (grupowanie wyrazów)
Stosujemy metodę grupowania $x^2(2x+3)+2(2x+3)=0$ albo $2x(x^2+2)+3(x^2+2)=0$, skąd wynika, że $(2x+3)(x^2+2)=0$, a stąd otrzymujemy $x=-\frac{3}{2}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy pogrupuje wyrazy do postaci, z której łatwo można doprowadzić do postaci iloczynowej, np.: $x^2(2x+3)+2(2x+3)=0$ lub $2x(x^2+2)+3(x^2+2)=0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy otrzyma rozwiązanie $x=-\frac{3}{2}$.

II sposób rozwiązania (dzielenie)
Oznaczmy $W(x)=2x^3+3x^2+4x+6$. Sprawdzamy, że $W\left(-\frac{3}{2}\right)=2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^3+3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2+4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+6=0$, więc jednym z pierwiastków tego wielomianu jest $x=-\frac{3}{2}$. Dzielimy wielomian przez dwumian $x+\frac{3}{2}$ i otrzymujemy $2x^2+4$. Zapisujemy więc równanie w postaci $\left(x+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(2x^2+4\right)=0$. Ponieważ $2x^2+4>0$ dla każdej liczby rzeczywistej x, więc jedynym rzeczywistym rozwiązaniem równania jest $x=-\frac{3}{2}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

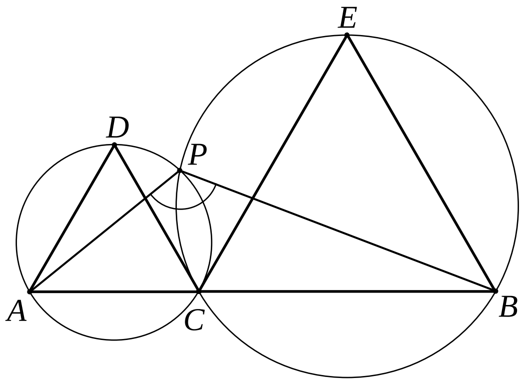
Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy wykona dzielenie wielomianu przez dwumian $x+\frac{3}{2}$, otrzyma iloraz $2x^2+4$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy otrzyma rozwiązanie $x=-\frac{3}{2}$.

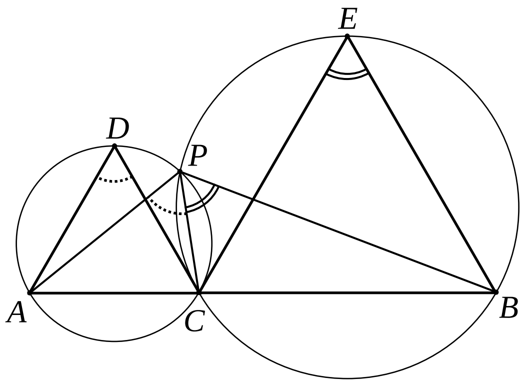
Zadanie 26. *(2pkt)*
Na odcinku *AB* wybrano punkt *C*, a następnie zbudowano trójkąty równoboczne *ACD* i *CBE* tak, że wierzchołki *D* i *E* leżą po tej samej stronie prostej *AB*. Okręgi opisane na tych trójkątach przecinają się w punktach *C* i *P* (zobacz rysunek).



Udowodnij, że miara kąta *APB* jest równa $120°$.

Dowód

Poprowadźmy odcinek *CP*.



Kąty *ADC* i *APC* to kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku *AC*, więc kąty te mają równe miary. Miara kąta *ADC* jest równa $60°$, gdyż jest to kąt trójkąta równobocznego, więc

$$|\sphericalangle APC| = 60°.$$

Tak samo kąty *CEB* i *CPB* to kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku *CB*, więc mają równe miary. Miara kąta *CEB* jest równa $60°$, gdyż jest to kąt trójkąta równobocznego, więc

$$|\sphericalangle CPB| = 60°.$$

Zatem $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle APC| + |\sphericalangle CPB| = 60° + 60° = 120°$, co należało udowodnić.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy zauważy, że kąty *ADC* i *APC* to kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku *AC* lub kąty *CEB* i *CPB* to kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku *CB* i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

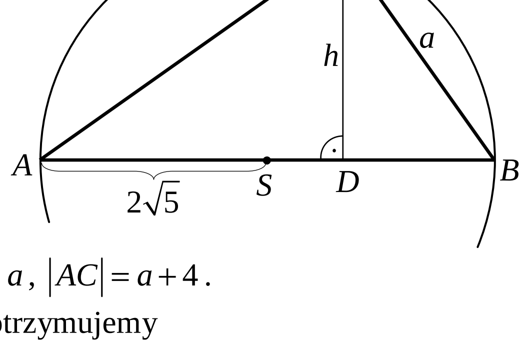
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 27. ***(4pkt)***

Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy $2\sqrt{5}$. Jedna z przyprostokątnych tego trójkąta jest o 4 dłuższa od drugiej przyprostokątnej. Oblicz wysokość tego trójkąta opuszczoną na przeciwprostokątną.

Rozwiązanie

Ponieważ trójkąt jest prostokątny, więc jego przeciwprostokątna jest średnicą okręgu opisanego na tym trójkącie. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Zatem $|AB| = 4\sqrt{5}$, $|BC| = a$, $|AC| = a + 4$.

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 \text{, czyli } \left(4\sqrt{5}\right)^2 = (a+4)^2 + a^2 .$$

Stąd mamy

$$16 \cdot 5 = a^2 + 8a + 16 + a^2 ,$$
$$2a^2 + 8a - 4 \cdot 16 = 0 ,$$
$$a^2 + 4a - 32 = 0 .$$
$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-32) = 144 ,\ \sqrt{\Delta} = 12 ,$$
$$a = \frac{-4-12}{2} = -8 \text{ lub } a = \frac{-4+12}{2} = 4 .$$

Pierwsze z rozwiązań odrzucamy (długość boku trójkąta nie może być ujemna), więc

$$|BC| = 4 \text{ oraz } |AC| = 4 + 4 = 8 .$$

Ponieważ trójkąty ACD i ABC są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku A, więc są podobne (cecha kąt-kąt-kąt podobieństwa trójkątów). Wynika stąd

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|BC|}{|AB|} \text{, czyli } \frac{h}{8} = \frac{4}{4\sqrt{5}} .$$

Zatem

$$h = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5} .$$

Odpowiedź: Wysokość trójkąta opuszczona na przeciwprostokątną jest równa $\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zdający zapisze równanie (lub układ równań) pozwalające obliczyć długość jednej z przyprostokątnych trójkąta, np.: $\left(4\sqrt{5}\right)^2 = (a+4)^2 + a^2$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający obliczy długość jednej z przyprostokątnych trójkąta: $|BC| = 4$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..3 pkt

Zdający zapisze równanie lub układ równań pozwalający obliczyć wysokość trójkąta opuszczoną na przeciwprostokątną, np.: $\frac{h}{8} = \frac{4}{4\sqrt{5}}$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Zdający obliczy wysokość trójkąta opuszczoną na przeciwprostokątną: $h = \frac{8\sqrt{5}}{5}$.

Zadanie 28. ***(4 pkt)***

W pojemniku jest osiem kul ponumerowanych od 1 do 8, przy czym kule z numerami, których reszta z dzielenia przez 3 jest równa 1 są białe, a pozostałe kule są czarne. Losujemy z pojemnika jednocześnie dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy kule różnych kolorów, których iloczyn numerów będzie większy od 6 i nie większy od 35.

I sposób rozwiązania (klasyczna definicja prawdopodobieństwa - ciągi)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary (x, y) różnych liczb naturalnych ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 8\cdot 7 = 56$. Mamy więc do czynienia z modelem klasycznym.

Spośród liczb ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ resztę z dzielenia przez 3 równą 1 dają trzy liczby: 1, 4, 7. Zatem kule z tymi numerami są białe, a pozostałe kule są czarne. Mamy więc następujące kule: ①, ❷, ❸, ④, ❺, ❻, ⑦, ❽.

Oznaczamy przez A zdarzenie polegające na tym, że wylosujemy kule różnych kolorów, których iloczyn numerów będzie większy od 6 i nie większy od 35. Wypiszmy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A:

(①,❽), (❷,④), (❷,⑦), (❸,④), (❸,⑦), (④,❷),(④,❸), (④,❺), (④,❻),
(④,❽), (❺,④), (❺,⑦), (❻,④), (⑦,❷), (⑦,❸), (⑦,❺),(❽,①), (❽,④),

Zatem $|A| = 18$ i $P(A) = \frac{18}{8\cdot 7} = \frac{9}{28}$.

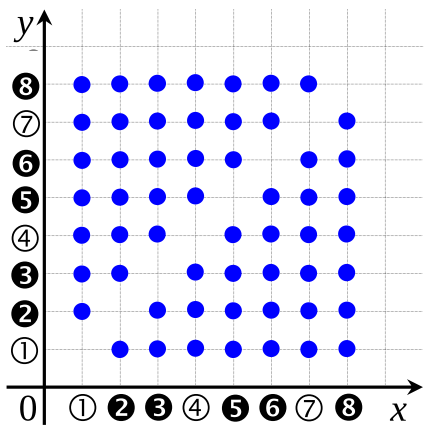
Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy kule różnych kolorów, których iloczyn numerów będzie większy od 6 i nie większy od 35 jest równe $\frac{9}{28}$.

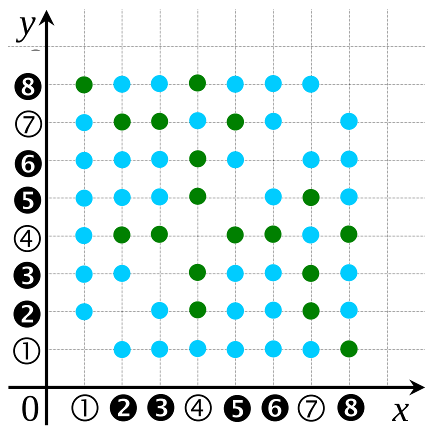
<u>Uwaga</u>

Możemy zilustrować zbiór wszystkich zdarzenia elementarnych w tabeli 8 na 8 oraz zaznaczyć pola sprzyjające zdarzeniu *A*.

	①	❷	❸	④	❺	❻	⑦	❽
①								X
❷				X			X	
❸				X			X	
④		X	X		X	X		X
❺				X			X	
❻				X				
⑦		X	X		X			
❽	X			X				

Możemy również potraktować zdarzenie elementarne jak punkt w prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie i wyróżnić te punkty, które odpowiadają zdarzeniom elementarnym sprzyjającym zdarzeniu *A*.





Prawdopodobieństwo zdarzenia *A* jest zatem równe

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{18}{56}=\frac{9}{28}.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zdający

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega|=8\cdot 7$

albo

- wypisze zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *A* i spełniające dwa spośród trzech warunków:
    - kule są różnych kolorów
    - iloczyn numerów kul jest większy od 6
    - iloczyn numerów kul jest nie większy od 35

albo

- wypisze zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *A* zakładając błędnie, że iloczyn numerów kul jest mniejszy od 35, np.:

  ①,❽), (❷,④), (❷,⑦), (❸,④), (❸,⑦), (④,❷), (④,❸), (④,❺),
  (④,❻), (④,❽), (❺,④), (❻,④), (⑦,❷), (⑦,❸), (❽,①), (❽,④),

i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych i wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *A*:

$|\Omega|=8\cdot 7$,

A = {(①,❽), (❷,④), (❷,⑦), (❸,④), (❸,⑦), (④,❷), (④,❸), (④,❺), (④,❻),
(④,❽), (❺,④), (❺,⑦), (❻,④), (⑦,❷), (⑦,❸), (⑦,❺), (❽,①), (❽,④)}

i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych, wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *A* i poda ich liczbę:

$|\Omega|=56$,

A = {(①,❽), (❷,④), (❷,⑦), (❸,④), (❸,⑦), (④,❷), (④,❸), (④,❺), (④,❻),
(④,❽), (❺,④), (❺,⑦), (❻,④), (⑦,❷), (⑦,❸), (⑦,❺), (❽,①), (❽,④)},

$|A|=18$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia *A*: $P(A)=\frac{9}{28}$.

<u>Uwagi</u>

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A)>1$, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeśli zdający błędnie założy, że iloczyn numerów kul jest mniejszy od 35 i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.
3. Jeśli zdający przyjmie błędnie, że wszystkie liczby ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1 to 4 i 7 i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.

II sposób rozwiązania (klasyczna definicja prawdopodobieństwa - zbiory)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie zbiory $\{x, y\}$ złożone z dwóch liczb naturalnych ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$. Mamy więc do czynienia z modelem klasycznym.

Spośród liczb ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ resztę z dzielenia przez 3 równą 1 dają trzy liczby: 1, 4, 7. Zatem kule z tymi numerami są białe, a pozostałe kule są czarne. Mamy więc następujące kule: ①, ❷, ❸, ④, ❺, ❻, ⑦, ❽.

Oznaczamy przez *A* zdarzenie polegające na tym, że wylosujemy kule różnych kolorów, których iloczyn numerów będzie większy od 6 i nie większy od 35. Wypiszmy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *A*:

{①,❽},{❷,④},{❷,⑦},{❸,④},{❸,⑦},{④,❺},{④,❻},{④,❽},{❺,⑦},

Zatem $|A| = 9$ i $P(A) = \frac{9}{28}$.

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy kule różnych kolorów, których iloczyn numerów będzie większy od 6 i nie większy od 35 jest równe $\frac{9}{28}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zdający

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = \frac{8 \cdot 7}{2}$

albo

- wypisze zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *A* i spełniające dwa spośród trzech warunków:
  - kule są różnych kolorów
  - iloczyn numerów kul jest większy od 6
  - iloczyn numerów kul jest nie większy od 35

albo

- wypisze zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *A* zakładając błędnie, że iloczyn numerów kul jest mniejszy od 35, np.:

{①,❽},{❷,④},{❷,⑦},{❸,④},{❸,⑦},{④,❺},{④,❻},{④,❽}

i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych i wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *A*: $|\Omega| = \frac{8 \cdot 7}{2}$,

A = {{①,❽},{❷,④},{❷,⑦},{❸,④},{❸,⑦},{④,❺},{④,❻},{④,❽},{❺,⑦}},

i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..3 pkt

Zdający obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych, wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A i poda ich liczbę: $|\Omega| = 28$, $|A| = 9$,

A= {{①,❽},{❷,④},{❷,⑦},{❸,④},{❸,⑦},{④,❺},{④,❻},{④,❽},{❺,⑦}}.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

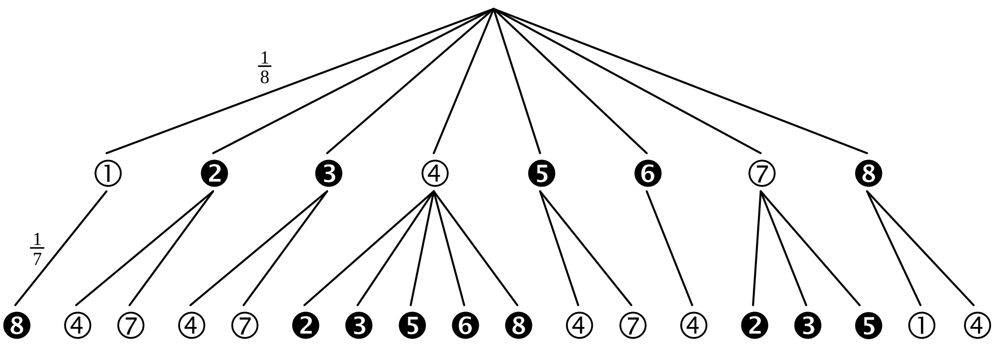
Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{9}{28}$.

Uwagi

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A) > 1$, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeśli zdający błędnie założy, że iloczyn numerów kul jest mniejszy od 35 i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.
3. Jeśli zdający przyjmie błędnie, że wszystkie liczby ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1 to 4 i 7 i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.

III sposób rozwiązania (metoda drzewa)

Narysujmy drzewo ilustrujące doświadczenie losowe jakim jest losowanie kolejno dwóch kul, przy czym kulę wylosowaną za pierwszym razem odkładamy i drugą kulę losujemy z pozostałych siedmiu kul. Wystarczy narysować tylko te gałęzie drzewa, które odpowiadają zdarzeniu A polegającemu na tym, że wylosujemy kule różnych kolorów, których iloczyn numerów będzie większy od 6 i nie większy od 35. Prawdopodobieństwo na każdym odcinku drzewa odpowiadającym losowaniu pierwszej kuli jest równe $\frac{1}{8}$, a na każdym odcinku odpowiadającym losowaniu drugiej kuli $\frac{1}{7}$.



Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest więc równe

$$P(A) = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7} + \left(\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}\right) + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7} + \left(\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}\right) = 18\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7} = \frac{9}{28}.$$

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..1 pkt

Zdający narysuje drzewo i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający narysuje drzewo, zapisze prawdopodobieństwa na jego gałęziach i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Uwagi

1. Oceniamy rozwiązanie na **0 punktów**, gdy w dalszej części rozwiązania zdający dodaje prawdopodobieństwa wzdłuż gałęzi zamiast mnożyć albo mnoży otrzymane iloczyny zamiast dodawać.
2. Jeżeli zdający opisał prawdopodobieństwa tylko na istotnych gałęziach, to kwalifikujemy to do kategorii „pokonanie zasadniczych trudności zadania".
3. Jeżeli zdający narysował drzewo składające się tylko z istotnych gałęzi i opisał prawdopodobieństwa na jego gałęziach, to kwalifikujemy to do kategorii „pokonanie zasadniczych trudności zadania".
4. Jeżeli rozwiązujący popełni błąd rachunkowy lub nieuwagi i na tym zakończy, to otrzymuje **2 punkty**.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..3 pkt

Zdający narysuje drzewo składające się tylko z istotnych gałęzi lub wskaże na drzewie istotne gałęzie (np. pogrubi gałęzie lub zapisze prawdopodobieństwa tylko na istotnych gałęziach) i zapisze prawdopodobieństwo na co najmniej jednym odcinku każdego poziomu drzewa.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Zdający obliczy prawdopodobieństwo omawianego zdarzenia: $\frac{9}{28}$

Uwagi

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A)>1$, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeśli zdający błędnie założy, że iloczyn numerów kul jest mniejszy od 35 i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.
3. Jeśli zdający przyjmie błędnie, że wszystkie liczby ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1 to 4 i 7 i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.

Zadanie 29. ***(5pkt)***

Do zbiornika można doprowadzić wodę dwiema rurami. Czas napełniania zbiornika tylko pierwszą rurą jest o 5 godzin i 30 minut krótszy od czasu napełniania tego zbiornika tylko drugą rurą, natomiast 15 godzin trwa napełnienie tego zbiornika obiema rurami jednocześnie. Oblicz, w ciągu ilu godzin pusty zbiornik zostanie napełniony, jeśli woda będzie doprowadzana tylko pierwszą rurą.

Rozwiązanie (I sposób)

Niech V oznacza pojemność zbiornika w m^3, t czas, w godzinach, w ciągu którego zostanie napełniony zbiornik jedynie z pierwszej rury, i niech p_1, p_2 oznacza ilość wody w m^3, jaką dostarcza odpowiednio pierwsza i druga rura w ciągu jednej godziny. Wtedy

$$V = p_1 \cdot t .$$

Czas napełniania zbiornika tylko druga rurą jest równy $t+5,5$ godziny, więc

$$V = p_2 \cdot (t+5,5) .$$

Za pomocą obu rur napełnia się w ciągu 15 godzin, więc

$$V = (p_1 + p_2) \cdot 15 .$$

Porównując prawe strony dwóch pierwszych równań mamy

$$p_1 \cdot t = p_2 \cdot (t+5,5), \text{ skąd } p_1 = p_2 \cdot \frac{t+5,5}{t}.$$

Stąd, z drugiego i z trzeciego równania otrzymujemy

$$p_2 \cdot (t+5,5) = \left(p_2 \cdot \frac{t+5,5}{t} + p_2 \right) \cdot 15,$$

$$p_2 \cdot t \cdot (t+5,5) = p_2 \cdot (t+5,5+t) \cdot 15,$$

$$t^2 + 5,5 \cdot t = 30 \cdot t + 82,5,$$

$$t^2 - 24,5 \cdot t - 82,5 = 0.$$

$$\Delta = (-24,5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-82,5) = 930,25, \ \sqrt{\Delta} = \sqrt{930,25} = 30,5,$$

$$t = \frac{24,5-30,5}{2} = -3 \text{ lub } t = \frac{24,5+30,5}{2} = 27,5.$$

Pierwsze z tych rozwiązań odrzucamy, gdyż czas napełniania zbiornika nie może być ujemny.

Odpowiedź: Pusty zbiornik zostanie napełniony w ciągu 27 godzin i 30 minut, jeśli woda będzie doprowadzana tylko pierwszą rurą.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt
Zdający przyjmie oznaczenia i zapisze równania wynikające z treści zadania, np.:
$V = p_1 \cdot t$, $V = p_2 \cdot (t+5,5)$, gdzie V oznacza pojemność zbiornika w m^3, p_1, p_2 – ilość wody w m^3, jaką dostarcza do zbiornika odpowiednio pierwsza i druga rura w ciągu jednej godziny.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt
Zdający zapisze układu równań pozwalający obliczyć czas, w ciągu którego pusty zbiornik zostanie napełniony, jeśli woda będzie doprowadzana tylko pierwszą rurą, np.:

$$\begin{cases} V = p_1 \cdot t \\ V = p_2 \cdot (t+5,5) \\ V = (p_1 + p_2) \cdot 15 \end{cases}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt
Zdający doprowadzi układ do równania z jedną niewiadomą, np.: $t^2 - 24,5 \cdot t - 82,5 = 0$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....4 pkt
Zdający

- rozwiąże równanie $t^2 - 24,5 \cdot t - 82,5 = 0$ i nie odrzuci rozwiązania $t = -3$

albo

- rozwiąże zadanie do końca z błędami rachunkowymi.

Rozwiązanie bezbłędne ....5 pkt
Zdający obliczy czas, w ciągu którego pusty zbiornik zostanie napełniony, jeśli woda będzie doprowadzana tylko pierwszą rurą: 27,5 godziny.

Rozwiązanie (II sposób)
Niech t oznacza czas, w godzinach, w ciągu którego zostanie napełniony zbiornik jedynie z pierwszej rury. Wtedy czas, w ciągu którego zostanie napełniony zbiornik jedynie z drugiej

rury jest równy $t+5,5$ godziny. W ciągu jednej godziny z pierwszej rury wpływa $\frac{1}{t}$ objętości zbiornika, a z drugiej $\frac{1}{t+5,5}$ objętości zbiornika. Zatem w ciągu jednej godziny z obu rur jednocześnie wpływa $\frac{1}{t}+\frac{1}{t+5,5}$ objętości zbiornika. Skoro zbiornik napełni się z obu rur w ciągu 15 godzin, więc w ciągu godziny napełnia się $\frac{1}{15}$ zbiornika. Otrzymujemy równanie

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{t+5,5}=\frac{1}{15},$$

$$15\left(t+5,5\right)+15t=t\left(t+5,5\right),$$

$$15t+82,5+15t=t^2+5,5t,$$

$$t^2-24,5t-82,5=0.$$

$$\Delta=\left(-24,5\right)^2-4\cdot1\cdot\left(-82,5\right)=930,25,\ \sqrt{\Delta}=\sqrt{930,25}=30,5,$$

$$t=\frac{24,5-30,5}{2}=-3 \text{ lub } t=\frac{24,5+30,5}{2}=27,5.$$

Pierwsze z tych rozwiązań odrzucamy, gdyż czas napełniania zbiornika nie może być ujemny.
Odpowiedź: Pusty zbiornik zostanie napełniony w ciągu 27 godzin i 30 minut, jeśli woda będzie doprowadzana tylko pierwszą rurą.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt
Zdający wprowadzi jako niewiadomą czas, w ciągu którego zostanie napełniony zbiornik jedynie z jednej z rur, np. z pierwszej, następnie zapisze w zależności od wprowadzonej zmiennej czas, w ciągu którego zostanie napełniony zbiornik jedynie z drugiej rury oraz ustali jaka część zbiornika jest napełniana w ciągu jednej godziny z pierwszej rury lub z drugiej rury, lub z obu rur jednocześnie, np.:
t – czas, w godzinach, w ciągu którego zbiornik zostanie napełniony tylko z pierwszej rury,
$\frac{1}{t}$ – część zbiornika napełniana w ciągu jednej godziny z pierwszej rury.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt
Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.: $\frac{1}{t}+\frac{1}{t+5,5}=\frac{1}{15}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt
Zdający doprowadzi układ do równania kwadratowego z jedną niewiadomą, np.:
$t^2-24,5\cdot t-82,5=0$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....4 pkt
Zdający

- rozwiąże równanie $t^2-24,5\cdot t-82,5=0$ i nie odrzuci rozwiązania $t=-3$

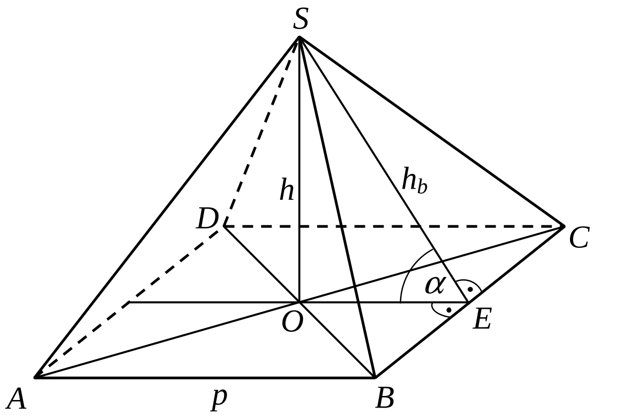
albo

- rozwiąże zadanie do końca z błędami rachunkowymi.

Rozwiązanie bezbłędne ....5 pkt
Zdający obliczy czas, w ciągu którego pusty zbiornik zostanie napełniony, jeśli woda będzie doprowadzana tylko pierwszą rurą: 27,5 godziny.

Zadanie 30. ***(5pkt)***
Piramida Cheopsa ma kształt ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Każda ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy ostrosłupa pod kątem $52°$, a pole powierzchni ściany bocznej jest równe 21 550 m^2. Oblicz objętość piramidy. Wynik zapisz w postaci $a \cdot 10^k$, gdzie $1 \le a < 10$ i k jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Zaznaczmy też kąt α między ścianą boczną BCS ostrosłupa a płaszczyzną jego podstawy.



Pole ściany bocznej BCS jest równe 21550, więc możemy zapisać równanie

$$\frac{1}{2} p h_b = 21550 .$$

Z trójkąta prostokątnego OES otrzymujemy

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}p}{h_b} .$$

Stąd

$$h_b = \frac{p}{2\cos\alpha} .$$

Podstawiając to do pierwszego równania otrzymujemy

$$\frac{1}{2} p \cdot \frac{p}{2\cos\alpha} = 21550 ,$$

$$p^2 = 4 \cdot 21550 \cdot \cos\alpha ,$$

$$p^2 = 86200 \cdot \cos 52° ,$$

więc

$$p = 10\sqrt{862 \cdot \cos 52°} .$$

Ponownie z trójkąta prostokątnego OES otrzymujemy

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{\frac{1}{2}p}, \text{ skąd } \ h = \frac{1}{2} p \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} p \cdot \operatorname{tg} 52° .$$

Objętość ostrosłupa jest zatem równa

$$V = \frac{1}{3} p^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 86200 \cdot \cancel{\cos 52°} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{862 \cdot \cos 52°} \cdot \frac{\sin 52°}{\cancel{\cos 52°}} = \frac{431000}{3} \sqrt{862 \cdot \cos 52°} \cdot \sin 52° .$$

Z tablic odczytujemy, że $\sin 52^\circ \approx 0,788$ i $\cos 52^\circ \approx 0,6157$. Zatem

$$V \approx \frac{431000}{3}\sqrt{862 \cdot 0,6157} \cdot 0,788 \approx 2608077,2 \approx 2,608 \cdot 10^6 \text{ m}^3.$$

Odpowiedź: Objętość Piramidy Cheopsa jest równa około $2,608 \cdot 10^6$ m^3.

Schemat oceniania
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

Zapisanie jednego z równań: $\frac{1}{2}ph_b = 21550$, $\cos 52^\circ = \frac{\frac{1}{2}p}{h_b}$, gdzie p oznacza długość krawędzi podstawy ostrosłupa, zaś h_b wysokość ściany bocznej ostrosłupa.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt
Zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć długość krawędzi podstawy ostrosłupa oraz wysokość ostrosłupa: $\frac{1}{2}ph_b = 21550$ oraz $\cos 52^\circ = \frac{\frac{1}{2}p}{h_b}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt
Obliczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa lub kwadratu tej długości:
$p = 10\sqrt{862 \cdot \cos 52^\circ} \approx 230,3765$, $p^2 = 86200 \cdot \cos 52^\circ \approx 53073,34$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....4 pkt

- Obliczenie wysokości ostrosłupa i na tym poprzestanie lub dalsze rozwiązanie błędne: $h = \frac{1}{2}p \cdot \mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}p \cdot \mathrm{tg}\, 52^\circ \approx 147,4342$

albo

- obliczenie objętości ostrosłupa z błędami rachunkowymi i konsekwentne zapisanie wyniku w postaci $a \cdot 10^k$, gdzie $1 \le a < 10$ i k jest liczbą całkowitą

albo

- obliczenie objętości ostrosłupa i nie zapisanie wyniku w postaci $a \cdot 10^k$, gdzie $1 \le a < 10$ i k jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie bezbłędne ....5 pkt
Obliczenie objętości ostrosłupa i zapisanie wyniku w postaci $a \cdot 10^k$, gdzie $1 \le a < 10$ i k jest liczbą całkowitą: $2,608 \cdot 10^6 \text{m}^3$

<u>Uwagi</u>
1. Jeżeli zdający wyrazi objętość w innych jednostkach niż m^3, to musi konsekwentnie podać wynik końcowy, np. $2,608 \cdot 10^9$ dm^3.
2. Zdający może przyjąć dowolne przybliżenie liczby a z dokładnością do jednego lub więcej miejsc po przecinku.