Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych
i schemat oceniania zadań otwartych

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	**D**	**A**	**C**	**A**	**B**	**D**	**D**	**A**	**C**	**D**	**C**	**D**	**B**	**A**	**B**	**B**	**D**	**C**	**D**

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 21. ***(2pkt)***
Przedstaw wielomian $W(x)=x^3-3x^2-5x+15$ w postaci iloczynu wielomianów stopnia pierwszego.

I sposób rozwiązania (grupowanie wyrazów)
Stosujemy metodę grupowania
$W\left(x\right)=x^3-3x^2-5x+15=x^2\left(x-3\right)-5\left(x-3\right)=\left(x-3\right)\left(x^2-5\right)=\left(x-3\right)\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt,
gdy zapisze wielomian *W* w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopni dodatnich, np.:
$W\left(x\right)=\left(x-3\right)\left(x^2-5\right)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt,
gdy zapisze wielomian *W* w postaci iloczynu trzech wielomianów stopni dodatnich:
$W\left(x\right)=\left(x-3\right)\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)$.

II sposób rozwiązania (dzielenie)
Sprawdzamy, że $W\left(3\right)=3^3-3\cdot3^2-5\cdot3+15=0$, więc jednym z pierwiastków tego wielomianu jest $x=3$. Dzielimy wielomian przez dwumian $x-3$ i otrzymujemy iloraz x^2-5, który rozkładamy na czynniki liniowe stosując wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów, czyli $x^2-5=\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)$. Zatem $W\left(x\right)=\left(x-3\right)\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt,
gdy wykona dzielenie wielomianu *W* przez dwumian $x-3$, otrzyma iloraz x^2-5 i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt,
gdy zapisze wielomian *W* w postaci iloczynu trzech wielomianów stopni dodatnich:
$W\left(x\right)=\left(x-3\right)\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)$.

Zadanie 22. ***(2pkt)***
Rozwiąż nierówność $7x^2+6x\geq1$.

Rozwiązanie
Nierówność zapisujemy w postaci $7x^2+6x-1\geq0$, a następnie obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $7x^2+6x-1$, rozkładając go na czynniki liniowe

$$7x^2+6x-1=(x+1)(7x-1).$$

Stąd

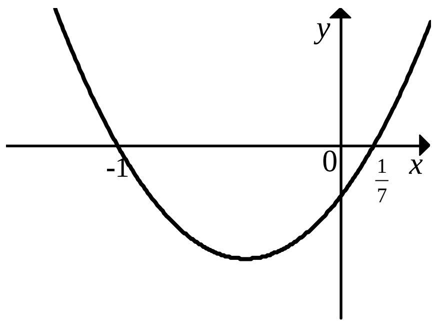
$$x_1=-1,\ x_2=\frac{1}{7}.$$

Możemy również obliczyć pierwiastki wykorzystując wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego. Wówczas

$$\Delta=6^2-4\cdot7\cdot(-1)=64,\ \sqrt{\Delta}=8,$$

$$x_1=\frac{-6-8}{2\cdot7}=-1,\ x_2=\frac{-6+8}{2\cdot7}=\frac{1}{7}.$$

Szkicujemy wykres trójmianu kwadratowego $y=7x^2+6x-1$,



z którego odczytujemy zbiór rozwiązań rozwiązywanej nierówności

$$x\in(-\infty,-1\rangle\cup\left\langle\tfrac{1}{7},+\infty\right).$$

Odpowiedź: $x\in(-\infty,-1\rangle\cup\left\langle\tfrac{1}{7},+\infty\right)$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt,
gdy:

- obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1=-1,\ x_2=\frac{1}{7}$ i na tym

  poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $7(x+1)\left(x-\frac{1}{7}\right)$ i na tym

  poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- zapisze nierówność w postaci równoważnej $\left|x+\frac{3}{7}\right|\geq\frac{4}{7}$ i na tym poprzestanie lub błędnie

  zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność

albo

- błędnie przekształci nierówność do postaci równoważnej, np. zapisze $\left|x+\frac{3}{7}\right|\leq\frac{4}{7}$

  i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje ....2 pkt,
gdy:

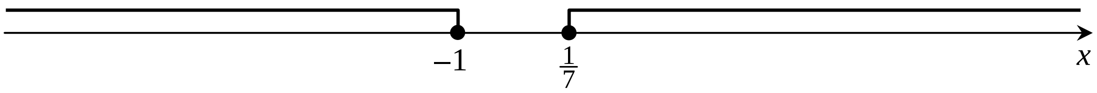
- poda zbiór rozwiązań nierówności: $\left(-\infty,-1\right\rangle\cup\left\langle\frac{1}{7},+\infty\right)$ lub $x\in\left(-\infty,-1\right\rangle\cup\left\langle\frac{1}{7},+\infty\right)$ lub ($x\le -1$ lub $x\ge\frac{1}{7}$)

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x\le -1$, $x\ge\frac{1}{7}$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

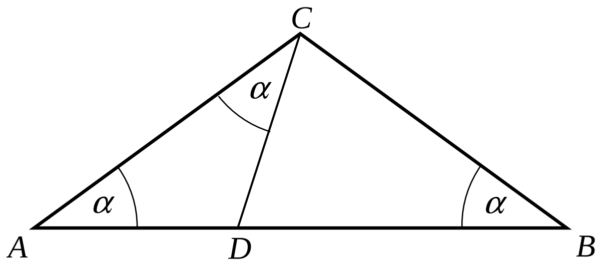


Zadanie 23. ***(2 pkt)***

Trójkąt równoramienny *ABC*, w którym $|AC|=|BC|$ podzielono odcinkiem *CD*, którego koniec *D* leży na boku *AB*, na dwa trójkąty równoramienne *ADC* oraz *BCD* tak, że $|AD|=|CD|$ oraz $|BD|=|BC|$. Oblicz miarę kąta *BAC*.

Rozwiązanie

Niech α oznacza kąt przy podstawie *AB* trójkąta *ABC*.



Ponieważ ten trójkąt jest równoramienny oraz $|AC|=|BC|$, więc $|\sphericalangle BAC|=|\sphericalangle ABC|=\alpha$.

Trójkąt *ADC* jest równoramienny, gdyż $|AD|=|CD|$, więc $|\sphericalangle DAC|=|\sphericalangle DCA|=\alpha$. Suma kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180°, więc

(1) $$|\sphericalangle ADC|=180^\circ-2\alpha.$$

Ponieważ $|BD|=|BC|$, więc trójkąt *BDC* także jest równoramienny. Zatem

$$|\sphericalangle BDC|=|\sphericalangle BCD|=\frac{180^\circ-\alpha}{2}=90^\circ-\frac{\alpha}{2}.$$

Kąty *ADC* i *BDC* są przyległe, więc ich suma jest równa 180°, czyli

$$180^\circ-2\alpha+90^\circ-\frac{\alpha}{2}=180^\circ.$$

Stąd $\frac{5}{2}\alpha=90^\circ$, więc $\alpha=36^\circ$, czyli $|\sphericalangle BAC|=36^\circ$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt,
gdy oznaczy jeden z kątów, np.: $|\sphericalangle ABC|=\alpha$, uzależni od niego inne kąty potrzebne do zapisania równania z wprowadzoną niewiadomą i zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.: $180^\circ-2\alpha+90^\circ-\frac{\alpha}{2}=180^\circ$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt,
gdy obliczy kąt *BAC* trójkąta *ABC*: $|\sphericalangle BAC|=36^\circ$.

Zadanie 24. ***(2 pkt)***

Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony dla $n \geq 1$ wzorem $a_n = \frac{5-2n}{2}$. Oblicz sumę $a_{51} + a_{52} + a_{53} + \ldots + a_{99} + a_{100}$.

I sposób rozwiązania

Zauważmy, że jeżeli ciąg (a_n) jest arytmetyczny, to ciąg $(a_{51}, a_{52}, \ldots, a_{100})$ także jest arytmetyczny, więc sumę $a_{51} + a_{52} + \ldots + a_{100}$ możemy obliczyć korzystając ze wzoru na sumę n-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, którego pierwszy wyraz jest równy $a_{51} = \frac{5-2\cdot 51}{2} = -\frac{97}{2}$, ostatni $a_{100} = \frac{5-2\cdot 100}{2} = -\frac{195}{2}$, a liczba jego wyrazów jest równa 50.

Otrzymujemy więc $\frac{a_{51} + a_{100}}{2} \cdot 50 = \left(-\frac{97}{2} - \frac{195}{2}\right) \cdot 25 = -146 \cdot 25 = -3650$.

II sposób rozwiązania

Zauważmy, że $a_{51} + a_{52} + \ldots + a_{100} = S_{100} - S_{50}$, gdzie S_{100} oraz S_{50} to suma odpowiednio stu oraz pięćdziesięciu początkowych wyrazów ciągu (a_n).

Ponieważ $a_1 = \frac{5-2\cdot 1}{2} = \frac{3}{2}$, $a_{50} = \frac{5-2\cdot 50}{2} = -\frac{95}{2}$ oraz $a_{100} = \frac{5-2\cdot 100}{2} = -\frac{195}{2}$, więc

$$S_{100} - S_{50} = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100 - \frac{a_1 + a_{50}}{2} \cdot 50 = \frac{\frac{3}{2} - \frac{195}{2}}{2} \cdot 100 - \frac{\frac{3}{2} - \frac{95}{2}}{2} \cdot 50 = -96 \cdot 50 + 46 \cdot 25 = -3650.$$

Odpowiedź.: Suma $a_{51} + a_{52} + a_{53} + \ldots + a_{99} + a_{100}$ jest równa -3650.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt,
gdy

- zapisze, że suma $a_{51} + a_{52} + \ldots + a_{100}$ to suma 50 początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego $(a_{51}, a_{52}, \ldots, a_{100})$: $a_{51} + a_{52} + \ldots + a_{100} = \frac{a_{51} + a_{100}}{2} \cdot 50$

albo

- zapisze, że $a_{51} + a_{52} + \ldots + a_{100} = S_{100} - S_{50}$, gdzie S_{100} oraz S_{50} to suma odpowiednio stu oraz pięćdziesięciu początkowych wyrazów ciągu (a_n)

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt,
gdy obliczy szukaną sumę: $a_{51} + a_{52} + \ldots + a_{100} = -3650$.

<u>Uwagi</u>

1. Jeżeli zdający zapisze, że $a_{51} + a_{52} + \ldots + a_{100} = \frac{a_{51} + a_{100}}{2} \cdot 49$ i konsekwentnie obliczy wartość tego wyrażenia, otrzymując -3577, to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający rozwiąże zadanie do końca popełniając jedynie błędy rachunkowe, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 25. ***(2 pkt)***

Udowodnij, że liczba $5^{23} - 125^7$ jest podzielna przez 20.

Dowód

Liczbę $5^{23} - 125^7$ możemy zapisać w postaci

$$5^{23} - 125^7 = 5^{23} - \left(5^3\right)^7 = 5^{23} - 5^{21} = 5^{21}\left(5^2 - 1\right) = 5^{21} \cdot 24.$$

Ponieważ liczba 5^{21} jest podzielna przez 5 i liczba 24 jest podzielna przez 4, więc iloczyn $5^{21}\cdot 24$ jest podzielny przez $5\cdot 4=20$. To kończy dowód.

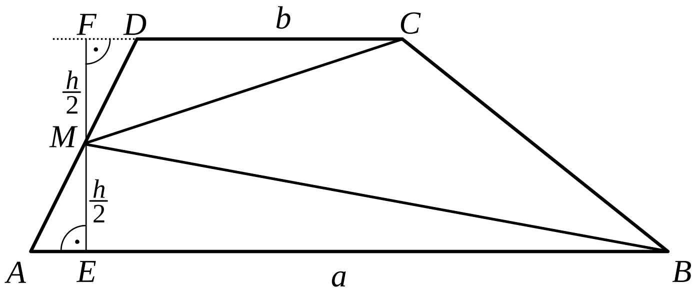
Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt,
gdy zapisze liczbę $5^{23}-125^{7}$ w postaci $5^{21}\cdot 24$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt,
gdy zapisze liczbę $5^{23}-125^{7}$ w postaci $5^{21}\cdot 24$ i uzasadni, że jest ona podzielna przez 20.

Zadanie 26. ***(2 pkt)***
W trapezie $ABCD$ łączymy środek M ramienia AD z końcami ramienia BC. Udowodnij, że pole trójkąta CMB jest połową pola trapezu $ABCD$.

I sposób rozwiązania
Poprowadźmy odcinek EF prostopadły do podstaw trapezu i przechodzący przez punkt M oraz przyjmijmy oznaczenia takie, jak na jak na rysunku.



Ponieważ punkt M jest środkiem ramienia AD, to $|AM|=|DM|$. Ponadto $|\sphericalangle EMA|=|\sphericalangle FMD|$ (kąty wierzchołkowe) oraz $|\sphericalangle EAM|=|\sphericalangle FDM|$, gdyż proste AB i CD są równoległe. Wynika stąd, że trójkąty EAM i FDM są przystające. Zatem $|FM|=|EM|$.

<u>Uwaga</u>
Równość $|FM|=|EM|$ otrzymujemy również natychmiast z twierdzenia Talesa.
Trójkąty ABM i CDM mają więc pola:

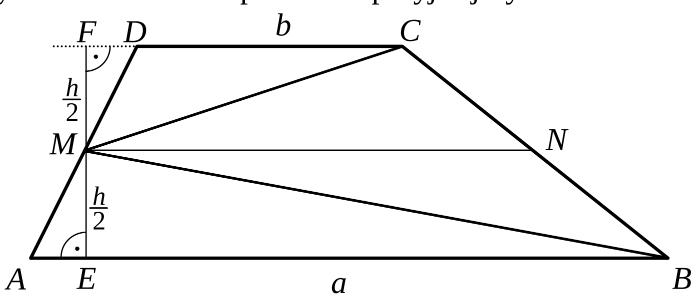
$$P_{ABM}=\tfrac{1}{2}\cdot a\cdot \tfrac{h}{2}=\tfrac{1}{4}ah\ ,\ P_{CDM}=\tfrac{1}{2}\cdot b\cdot \tfrac{h}{2}=\tfrac{1}{4}bh\,.$$

Zatem

$$P_{CMB}=P_{ABCD}-P_{ABM}-P_{CDM}=\tfrac{a+b}{2}\cdot h-\tfrac{1}{4}ah-\tfrac{1}{4}bh=\tfrac{1}{4}ah+\tfrac{1}{4}bh=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{a+b}{2}\cdot h=\tfrac{1}{2}P_{ABCD}\,.$$

To kończy dowód.

II sposób rozwiązania
Poprowadźmy odcinek EF prostopadły do podstaw trapezu i przechodzący przez punkt M, odcinek NM łączący środki ramion trapezu oraz przyjmijmy oznaczenia takie, jak na rysunku.



Jak w I sposobie rozwiązania wykazujemy, że $\left|FM\right| = \left|EM\right| = \frac{h}{2}$.

Ponieważ odcinek łączący środki ramion trapezu jest równoległy do podstaw trapezu i jego długość jest średnią arytmetyczną długości podstaw trapezu, czyli $\left|NM\right| = \frac{a+b}{2}$, więc

$$P_{CMB} = P_{BNM} + P_{CNM} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{2}\cdot\frac{h}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{2}\cdot\frac{h}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{2}\cdot h = \frac{1}{2}P_{ABCD}.$$

To kończy dowód.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt,
gdy

- zapisze pola trójkątów *AMB* i *CDM* w zależności od długości podstaw i wysokości trapezu: $P_{ABM} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{h}{2}$, $P_{CDM} = \frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{h}{2}$.

albo

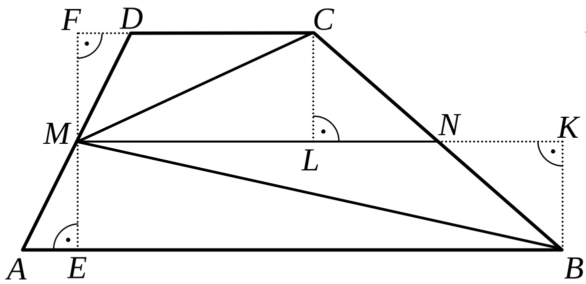
- zapisze pola trójkątów *BNM* i *CNM* w zależności od długości podstaw i wysokości trapezu: $P_{BNM} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{2}\cdot\frac{h}{2}$, $P_{CNM} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{2}\cdot\frac{h}{2}$.

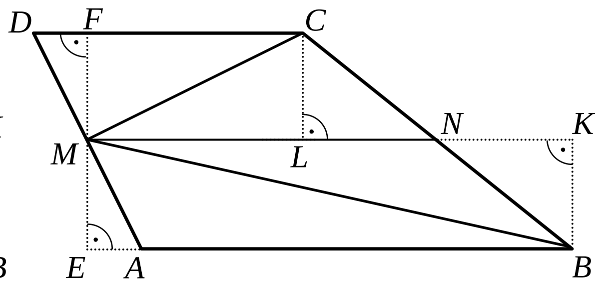
i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt,
gdy udowodni, że pole trójkąta *CMB* jest połową pola trapezu *ABCD*.

III sposób rozwiązania

Niech punkty E i F będą rzutami prostokątnymi punktu M na proste odpowiednio AB i CD, a punkty K i L – rzutami prostokątnymi punktów odpowiednio B i C na prostą MN przechodzącą przez środki M i N ramion trapezu. Dwie z trzech możliwych sytuacji zostały przedstawione na rysunkach.





Rozumowanie w trzeciej sytuacji, gdy trapez jest prostokątny, jest takie samo.
Jak w I sposobie rozwiązania wykazujemy, że trójkąty *EAM* i *FDM* są przystające oraz trójkąty *BKN* i *CLN* są przystające, więc pola trójkątów *EAM* i *FDM* są równe oraz pola trójkątów *BKN* i *CLN* są równe. W rezultacie pole trapezu *ABCD* jest sumą pól prostokątów *EBKM* oraz *MLCF*, a pole trójkąta *CMB* jest sumą pól trójkątów *BMK* i *CML*. Ale trójkąty *BMK* i *CML* to „połówki” prostokątów *EBKM* oraz *MLCF*. Stąd wynika, że pole trójkąta *CMB* jest połową pola trapezu *ABCD*. To kończy dowód.

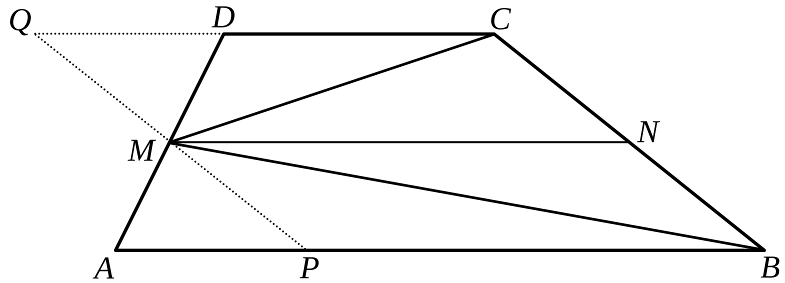
Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt,
gdy narysuje prostokąty *AEML* i *KMFD*, uzasadni, że pole figury złożonej z tych prostokątów jest równe polu trapezu *ABCD* i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt,
gdy narysuje prostokąty *EBKM* i *MLCF*, uzasadni, że figury złożonej z tych prostokątów jest równe polu trapezu *ABCD* i uzasadni, że pole trójkąta *CMB* jest równe polu figury złożonej z „połówek” prostokątów.

IV sposób rozwiązania

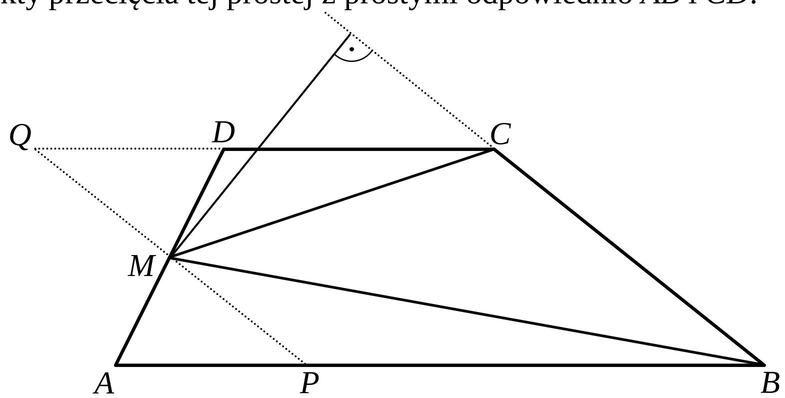
Poprowadźmy odcinek MN łączący środku ramion trapezu oraz prostą równoległą do ramienia BC i przechodzącą przez punkt M . Oznaczmy przez P i Q punkty przecięcia tej prostej z prostymi odpowiednio AB i CD.



Trójkąty PAM i QDM są przystające, gdyż $|AM| = |DM|$, $|\sphericalangle PMA| = |\sphericalangle QMD|$ (kąty wierzchołkowe) oraz $|\sphericalangle PAM| = |\sphericalangle QDM|$, gdyż proste AB i CD są równoległe. Wynika stąd, że pole trapezu $ABCD$ jest równe polu równoległoboku $PBCQ$. Z kolei ten równoległobok składa się z dwóch przystających równoległoboków $PBNM$ oraz $MNCQ$. Trójkąty BMN i CMN to „połówki" tych równoległoboków. Zatem pole trójkąta CMB jest połową pola równoległoboku $PBCQ$, a więc również połową pola trapezu $ABCD$. To kończy dowód.

V sposób rozwiązania

Poprowadźmy prostą równoległą do ramienia BC i przechodzącą przez punkt M . Oznaczmy przez P i Q punkty przecięcia tej prostej z prostymi odpowiednio AB i CD.



Tak jak w poprzednim sposobie rozwiązania wykazujemy, że trójkąty PAM i QDM są przystające, z czego wynika, że pole trapezu $ABCD$ jest równe polu równoległoboku $PBCQ$. Trójkąt CMB i równoległobok $PBCQ$ mają wspólną podstawę BC oraz tę samą wysokość opuszczoną na tę podstawę. Stąd wynika, że pole trójkąta CMB jest połową pola równoległoboku $PBCQ$, a więc połową pola trapezu $ABCD$. To kończy dowód.

Schemat oceniania IV i V sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt,
gdy narysuje równoległobok $PBCQ$ oraz uzasadni, że jego pole jest równe polu trapezu $ABCD$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt,
gdy narysuje równoległobok $PBCQ$, uzasadni, że jego pole jest równe polu trapezu $ABCD$ oraz uzasadni, że pole trójkąta CMB jest połową pola równoległoboku $PBCQ$.

Zadanie 27. *(4 pkt)*
Oblicz, ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych parzystych i większych od 3800.

I sposób rozwiązania
Policzmy najpierw, ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych większych od 3800. Są to zatem liczby: 3801, 3802, 3803, …, 9999. Jest ich zatem $9999-3800=6199$. Ponieważ liczb nieparzystych jest o jedną więcej niż parzystych, więc szukanych liczb parzystych jest
$\frac{6199-1}{2}=3099$.
Odpowiedź.: Wszystkich liczb czterocyfrowych parzystych i większych od 3800 jest 3099.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ....1 pkt
Zdający obliczy liczbę wszystkich liczb czterocyfrowych większych od 3800: 6199.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt
Zdający obliczy, że wszystkich liczb czterocyfrowych większych od 3800 jest 6199 oraz ustali, że w zbiorze: $\{3801, 3802, \ldots, 9999\}$ liczb nieparzystych jest o jedną więcej niż liczb parzystych.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt
Zdający obliczy, ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych parzystych: 3099.

II sposób rozwiązania
Rozważmy cztery przypadki:
(1) gdy cyfra tysięcy liczby jest większa od 3. Wówczas cyfry setek i dziesiątek mogą być dowolne, natomiast cyfra jedności może być dowolną cyfrą parzystą (gdyż interesują nas tylko liczby parzyste). W tym przypadku mamy więc $6\cdot 10\cdot 10\cdot 5=3000$ liczb.
(2) gdy cyfrą tysięcy jest 3 i cyfrą setek jest 9. Wtedy cyfra dziesiątek może być dowolna, a cyfra jedności może być dowolną cyfrą parzystą. Takich liczb jest $1\cdot 1\cdot 10\cdot 5=50$.
(3) gdy cyfrą tysięcy jest 3, cyfrą setek jest 8 i cyfra dziesiątek jest dodatnia. Wówczas cyfra jedności może być dowolną cyfrą parzystą. Takich liczb jest $1\cdot 1\cdot 9\cdot 5=45$.
(4) gdy cyfra tysięcy liczby jest równa 3, cyfra setek jest równa 8 i cyfrą dziesiątek jest 0. Wówczas cyfra jedności może dowolną cyfrą parzystą dodatnią. Takich liczb jest
$1\cdot 1\cdot 1\cdot 4=4$.
W rezultacie wszystkich czterocyfrowych parzystych i większych od 3800 jest
$3000+50+45+4=3099$.
Odpowiedź.: Wszystkich liczb czterocyfrowych parzystych i większych od 3800 jest 3099.

Uwaga
Zamiast rozpatrywać oddzielnie przypadek (3) oraz przypadek (4) można rozważyć przypadek (3’), czyli obliczyć, ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych parzystych, gdy cyfrą tysięcy jest 3, cyfrą setek jest 8 i cyfra dziesiątek jest dowolna, takich liczb jest $1\cdot 1\cdot 10\cdot 5=50$, a następnie zauważyć, że jedna z tych liczb, tj. 3800, nie jest większa od 3800. W efekcie wszystkich liczb czterocyfrowych parzystych większych od 3800, których cyfrą tysięcy jest 3, cyfrą setek jest 8 jest $50-1=49$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ....1 pkt
Zdający

- poprawnie ustali przypadki: (1), (2), (3) i (4)

albo

- poprawnie ustali przypadki: (1), (2), (3’).

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt
Zdający obliczy liczbę wszystkich liczb czterocyfrowych parzystych w jednym
z przypadków: (1), (2), (3), (4), (3’).

Pokonanie zasadniczych trudności zadania...3 pkt
Zdający

- obliczy liczby szukanych liczb w co najmniej trzech przypadkach spośród czterech przypadków: (1), (2), (3) i (4)

albo

- obliczy liczby szukanych liczb w co najmniej dwóch przypadkach spośród trzech przypadków: (1), (2), (3’).

Rozwiązanie pełne ....4 pkt
Zdający obliczy, ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych parzystych: 3099.

Zadanie 28. ***(4 pkt)***
Punkty $A=(-9,1)$ i $B=(8,-5)$ to kolejne wierzchołki rombu *ABCD*. Przekątna *AC* tego rombu jest zawarta w prostej o równaniu $y=\frac{2}{3}x+7$. Oblicz współrzędne wierzchołka *D* oraz obwód tego rombu.

Rozwiązanie
Długość boku rombu jest równa
$$|AB|=\sqrt{\left(8-(-9)\right)^2+(-5-1)^2}=\sqrt{289+36}=\sqrt{325}=5\sqrt{13}.$$
Zatem obwód rombu jest równy
$$Ob_{ABCD}=4\cdot 5\sqrt{13}=20\sqrt{13}.$$
Ponieważ przekątne rombu są prostopadłe i wzajemnie się połowią, więc prosta prostopadła zawierająca przekątną *BD* rombu jest prostopadła do prostej *AC* i przechodzi przez punkt *B*. Jej równanie ma zatem postać
$$y=-\frac{3}{2}(x-8)-5,\ \text{czyli}\ y=-\frac{3}{2}x+7.$$
Współrzędne punktu *S* przecięcia przekątnych rombu obliczymy, rozwiązując układ równań
$$\begin{cases} y=\frac{2}{3}x+7 \\ y=-\frac{3}{2}x+7 \end{cases}.$$
Przyrównując prawe strony równań układu, otrzymujemy
$$\frac{2}{3}x+7=-\frac{3}{2}x+7,$$
$$\frac{2}{3}x=-\frac{3}{2}x,$$
$$\frac{13}{6}x=0,$$
$$x=0.$$
Zatem $y=\frac{2}{3}\cdot 0+7=7$, czyli $S=(0,7)$.

Punkt *S* jest środkiem przekątnej *BD*, więc $S=\left(\frac{x_B+x_D}{2},\frac{y_B+y_D}{2}\right)=\left(\frac{8+x_D}{2},\frac{-5+y_D}{2}\right)$. Zatem
$$\frac{8+x_D}{2}=0\ \text{oraz}\ \frac{-5+y_D}{2}=7,$$
$$x_D+8=0\ \text{oraz}\ y_D-5=14,$$

$$x_D = -8 \text{ oraz } y_D = 19,$$

czyli $D = (-8,19)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zdający

- obliczy długość boku rombu: $|AB| = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}$

albo

- poda współczynnik kierunkowy prostej *BD*: $-\frac{3}{2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający zapisze układ równań pozwalający obliczyć współrzędne punktu *S* przecięcia przekątnych rombu: $y = -\frac{3}{2}(x-8) - 5$ i $y = \frac{2}{3}x + 7$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..3 pkt

Zdający obliczy współrzędne punktu *S* przecięcia przekątnych rombu: $S = (0,7)$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Zdający obliczy współrzędne wierzchołka *D* oraz obwód rombu : $D = (-8,19)$

$Ob_{ABCD} = 20\sqrt{13}$.

<u>Uwagi</u>

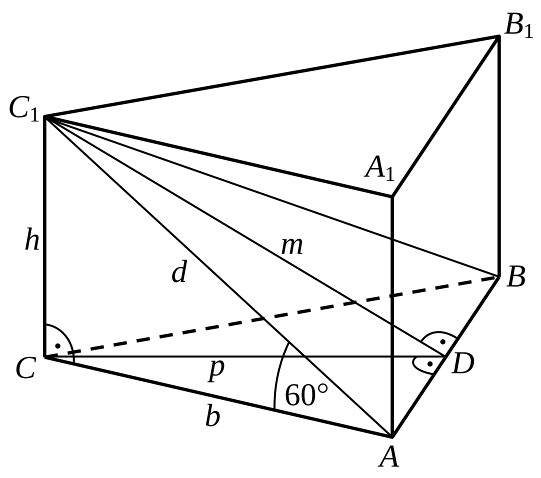
1. Jeżeli zdający obliczy tylko obwód rombu, to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający obliczy współrzędne punktu D oraz obwód rombu, popełniając w trakcie rozwiązania błędy rachunkowe, to otrzymuje **3 punkty**.

Zadanie 29. ***(5 pkt)***

Dany jest prosty graniastosłup trójkątny $ABCA_1B_1C_1$ (zobacz rysunek). Podstawa *ABC* tego graniastosłupa jest trójkątem równoramiennym, w którym $|AC| = |BC|$ oraz $|AB| = 16$. Pole trójkąta ABC_1 jest równe $32\sqrt{21}$, a przekątna AC_1 ściany bocznej jest nachylona do płaszczyzny podstawy graniastosłupa pod kątem $60°$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Pole trójkąta ABC_1 wyraża się wzorem: $P_{ABC_1} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |C_1D|$, ale $P_{ABC_1} = 32\sqrt{21}$ i $|AB| = 16$,

więc

$$\frac{1}{2}\cdot 16\cdot m=32\sqrt{21},$$

$$m=4\sqrt{21}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADC_1 otrzymujemy

$$d^2=m^2+\left|DC_1\right|^2,$$

$$d^2=\left(4\sqrt{21}\right)^2+8^2.$$

Stąd $d=\sqrt{16\cdot 21+64}=\sqrt{16\left(21+4\right)}=\sqrt{16\cdot 25}=4\cdot 5=20$.

Trójkąt ACC_1 jest „połową” trójkąta równobocznego o boku długości d, więc ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego otrzymujemy

$$h=\frac{d\sqrt{3}}{2}=\frac{20\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}.$$

Wreszcie z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CDC_1 otrzymujemy

$$m^2=h^2+p^2,$$

$$\left(4\sqrt{21}\right)^2=\left(10\sqrt{3}\right)^2+p^2,$$

Stąd $p=\sqrt{\left(4\sqrt{21}\right)^2-\left(10\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{16\cdot 21-100\cdot 3}=\sqrt{36}=6$.

Objętość graniastosłupa jest zatem równa

$$V=P_{ABC}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 16\cdot 6\cdot 10\sqrt{3}=480\sqrt{3}.$$

Odpowiedź.: Objętość graniastosłupa jest równa $V=480\sqrt{3}$.

Uwaga

Po obliczeniu długości przekątnej d ściany bocznej graniastosłupa możemy obliczyć długość boku AC trójkąta ABC, zauważając, że trójkąt ACC_1 jest „połową” trójkąta równobocznego o boku długości d, więc

$$b=\frac{d}{2}=\frac{20}{2}=10.$$

Następnie obliczamy, wykorzystując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta ADC, wysokość p trójkąta ABC opuszczoną na jego podstawę AB

$$b^2=\left|AD\right|^2+p^2,$$

$$10^2=8^2+p^2.$$

Stąd $p=\sqrt{10^2-8^2}=\sqrt{100-64}=\sqrt{36}=6$.

Wreszcie z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CDC_1 możemy obliczyć wysokość ostrosłupa

$$m^2=h^2+p^2,$$

$$\left(4\sqrt{21}\right)^2=h^2+6^2$$

Stąd $h=\sqrt{\left(4\sqrt{21}\right)^2-6^2}=\sqrt{16\cdot 21-36}=10\sqrt{3}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zdający obliczy wysokość m trójkąta równoramiennego ABC_1: $m=4\sqrt{21}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający obliczy długość przekątnej d ściany bocznej CAA_1C_1 graniastosłupa: $d=20$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..3 pkt
Zdający obliczy

- wysokość h graniastosłupa oraz zapisze równość pozwalającą obliczyć wysokość p trójkąta ABC: $h = 10\sqrt{3}$, $m^2 = h^2 + p^2$

albo

- wysokość p trójkąta ABC oraz zapisze równość pozwalającą obliczyć wysokość h graniastosłupa: $p = 6$, $m^2 = h^2 + p^2$.

Rozwiązanie prawie pełne ....4 pkt
Zdający

- obliczy wysokość h graniastosłupa oraz pole jego podstawy: $h = 10\sqrt{3}$, $P_{ABC} = 60\sqrt{3}$
  i błędnie obliczy objętość graniastosłupa, np. pisząc $V = \frac{1}{3} \cdot P_{ABC} \cdot h$

albo

- obliczy objętość graniastosłupa, popełniając błędy rachunkowe.

Rozwiązanie pełne ....5 pkt
Zdający obliczy objętość graniastosłupa: $V = 480\sqrt{3}$.

Zadanie 30. ***(5 pkt)***
Tę samą trasę z Kielc do Sandomierza pokonało dwóch rowerzystów. Drugi z nich wyruszył 28 minut później niż pierwszy, ale jechał ze średnią prędkością o 3 km/h większą od średniej prędkości pierwszego rowerzysty i dogonił go po pokonaniu 42 km trasy. Oblicz średnią prędkość każdego z tych rowerzystów.

I sposób rozwiązania
Niech v oznacza średnią prędkość pierwszego rowerzysty, a t czas (w godzinach), w jakim pierwszy rowerzysta pokonał pierwsze 42 km trasy. Wówczas średnia prędkość drugiego rowerzysty jest równa $v+3$, a czas, w jakim pokonał on pierwsze 42 km trasy jest równy $t - \frac{28}{60}$, czyli $t - \frac{7}{15}$. Otrzymujemy więc układ równań

$$\begin{cases} vt = 42 \\ (v+3)\left(t - \frac{7}{15}\right) = 42 \end{cases}.$$

Drugie z równań możemy zapisać w postaci równoważnej

$$vt - \frac{7}{15}v + 3t - \frac{7}{5} = 42.$$

Stąd i z pierwszego równania układu otrzymujemy

$$42 - \frac{7}{15}v + 3t - \frac{7}{5} = 42,$$

$$3t = \frac{7}{15}v + \frac{7}{5},$$

$$t = \frac{7}{45}v + \frac{7}{15}.$$

Podstawiając w miejsce t w pierwszym równaniu układu $\frac{7}{45}v + \frac{7}{15}$, uzyskujemy równanie z jedną niewiadomą

$$v\left(\frac{7}{45}v + \frac{7}{15}\right) = 42,$$

$$\frac{7}{45}v^2 + \frac{7}{15}v - 42 = 0,$$

$$\frac{1}{45}v^2 + \frac{1}{15}v - 6 = 0,$$

$$v^2 + 3v - 270 = 0.$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-270) = 1089,\ \sqrt{\Delta} = \sqrt{1089} = 33,$$

$$v=\frac{-3-33}{2}=-18 \text{ lub } v=\frac{-3+33}{2}=15.$$

Pierwsze z rozwiązań równania odrzucamy, gdyż prędkość nie może być ujemna.
Zatem $v=15$. Wtedy prędkość średnia drugiego rowerzysty jest równa $v+3=18$.
Odpowiedź.: Prędkość średnia pierwszego rowerzysty jest równa 15 km/h, a drugiego 18 km/h.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt
Zdający przyjmie oznaczenia, np.: v – średnia prędkość pierwszego rowerzysty, t – czas (w godzinach), w jakim pierwszy rowerzysta pokonał pierwsze 42 km trasy oraz zapisze równanie: $(v+3)\left(t-\frac{7}{15}\right)=42$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt
Zdający zapisze układ równań: $vt=42$ i $(v+3)\left(t-\frac{7}{15}\right)=42$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt
Zdający doprowadzi układ do równania z jedną niewiadomą, np.: $v\left(\frac{7}{45}v+\frac{7}{15}\right)=42$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....4 pkt
Zdający

- rozwiąże równanie $v\left(\frac{7}{45}v+\frac{7}{15}\right)=42$ i nie odrzuci rozwiązania $v=-18$

albo

- rozwiąże równanie z niewiadomą t i na tym poprzestanie: $15t^2-7t-98=0$, $t_1=\frac{14}{5}$, $t_2=-\frac{7}{3}$

albo

- rozwiąże zadanie do końca z błędami rachunkowymi.

Rozwiązanie bezbłędne ....5 pkt
Zdający obliczy średnią prędkość pierwszego i średnią prędkość drugiego rowerzysty: 15 km/h, 18 km/h.

II sposób rozwiązania
Niech v oznacza średnią prędkość pierwszego rowerzysty. Wówczas czas (w godzinach), w jakim pokonał on pierwsze 42 km trasy jest równy $\frac{42}{v}$, średnia prędkość drugiego rowerzysty jest równa $v+3$, a czas, w jakim pokonał on pierwsze 42 km trasy jest równy $\frac{42}{v+3}$. Ponieważ drugi rowerzysta pokonał pierwsze 42 km trasy o 28 minut, czyli $\frac{7}{15}$ godziny krócej niż pierwszy, więc otrzymujemy równanie

$$\frac{42}{v}=\frac{42}{v+3}+\frac{7}{15}.$$

Mnożąc obie strony tego równania przez $\frac{15}{7}v(v+3)$, otrzymujemy

$$90(v+3)=90v+v(v+3),$$

$$90v+270=90v+v^2+3v,$$

$$v^2+3v-270=0.$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-270) = 1089, \ \sqrt{\Delta} = \sqrt{1089} = 33,$$

$$v = \frac{-3-33}{2} = -18 \text{ lub } v = \frac{-3+33}{2} = 15.$$

Pierwsze z rozwiązań równania odrzucamy, gdyż prędkość nie może być ujemna.
Zatem $v = 15$. Wtedy prędkość średnia drugiego rowerzysty jest równa $v + 3 = 18$.
Odpowiedź.: Prędkość średnia pierwszego rowerzysty jest równa 15 km/h, a drugiego 18 km/h.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt
Zdający wprowadzi jako niewiadomą *v* średnią prędkość jednego z rowerzystów, np. pierwszego rowerzysty, następnie zapisze w zależności od wprowadzonej zmiennej średnią prędkość drugiego rowerzysty oraz czas (w godzinach), w jakim drugi rowerzysta pokonał pierwsze 42 km trasy: $v+3$, $\frac{42}{v+3}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt
Zdający wprowadzi jako niewiadomą *v* średnią prędkość jednego z rowerzystów, np. pierwszego rowerzysty, następnie

- zapisze w zależności od wprowadzonej zmiennej czas (w godzinach), w jakim pierwszy rowerzysta pokonał pierwsze 42 km trasy, średnią prędkość drugiego rowerzysty, czas (w godzinach), w jakim drugi rowerzysta pokonał pierwsze 42 km trasy: $\frac{42}{v}$, $v+3$, $\frac{42}{v+3}$

oraz

- poprawnie przeliczy 28 minut na godziny: $\frac{28}{60}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt
Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.: $\frac{42}{v} = \frac{42}{v+3} + \frac{7}{15}$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....4 pkt
Zdający

- rozwiąże równanie $\frac{42}{v} = \frac{42}{v+3} + \frac{7}{15}$ i nie odrzuci rozwiązania $v = -18$

albo

- rozwiąże zadanie do końca z błędami rachunkowymi.

Rozwiązanie bezbłędne ....5 pkt
Zdający obliczy średnią prędkość pierwszego i średnią prędkość drugiego rowerzysty: 15 km/h, 18 km/h.