MATURA 2014 z WSiP

Matematyka
Poziom rozszerzony

Zasady oceniania zadań

Kartoteka testu

Numer zadania	Sprawdzana umiejętność (z numerem obszaru standardów)	Sprawdzana czynność (z numerem standardu) Uczeń:	Maksymalna liczba punktów
1	II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji	rozwiązuje proste równania i nierówności z wartością bezwzględną (3eR)	4
2	II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji	stosuje wzór na logarytm potęgi i wzór na zamianę podstawy logarytmu (1bR)	4
3	III. Modelowanie matematyczne	rozwiązuje równania i nierówności z parametrem, przeprowadza dyskusję i wyciąga z niej wnioski (3bR)	3
4	III. Modelowanie matematyczne	rozwiązuje równania i nierówności wielomianowe (3cR)	4
5	III. Modelowanie matematyczne	rozwiązuje nierówności kwadratowe z parametrem, przeprowadza dyskusję i wyciąga z niej wnioski (3bR)	3
6	V. Rozumowanie i argumentacja	stosuje wzory Viète'a (3aR)	3
7	IV. Użycie i tworzenie strategii	wyznacza związki miarowe w bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii (9b)	5
8	IV. Użycie i tworzenie strategii	stosuje wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5c)	5
9	IV. Użycie i tworzenie strategii	wykonuje dzielenie wielomianu przez dwumian $x - a$; stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$ (2bR)	5
10	III. Modelowanie matematyczne	wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (10d)	4
11	IV. Użycie i tworzenie strategii	stosuje wzory na n-ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym (5c)	6
12	V. Rozumowanie i argumentacja	rozwiązuje zadania dotyczące wzajemnego położenia prostej i okręgu na płaszczyźnie kartezjańskiej (8bR)	4

Schemat oceniania zadań otwartych

UWAGA OGÓLNA

- Za prawidłowe rozwiązanie każdego z zadań inną metodą niż przewidziana w schemacie punktowania należy przyznać zdającemu maksymalną liczbę punktów.
- Za częściowe rozwiązanie zadania inną metodą niż przewidziana w schemacie rozwiązania należy przyznać zdającemu liczbę punktów adekwatną do wykonanych czynności.

Zadanie 1. (0–4)

Rozwiąż równanie $\left||x|+|2-x|\right|=2$.

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania **1 punkt.**

Przekształcenie danego równania do postaci: $|x|+|2-x|=2 \ \vee \ |x|+|2-x|=-2$ i uzasadnienie, że rozwiązaniem drugiego równania jest zbiór pusty.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny **2 punkty.**

Zastosowanie definicji bezwzględnej wartości do zapisania $|x|$ oraz $|2-x|$ bez użycia symbolu modułu:

$$|x|=\begin{cases} x & \text{dla } x\ge 0 \\ -x & \text{dla } x<0 \end{cases} \text{ oraz } |2-x|=\begin{cases} 2-x & \text{dla } x\le 2 \\ -2+x & \text{dla } x>2 \end{cases}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania **3 punkty.**

Zapisanie równania $|x|+|2-x|=2$ w postaci:

$$\begin{cases} x\in(-\infty;0) \\ -x+2-x=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x\in\langle 0;2\rangle \\ x+2-x=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x\in(2;+\infty) \\ x+(-2+x)=2 \end{cases}.$$

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) **3 punkty.**

Rozwiązanie bezbłędne **4 punkty.**

Wyznaczenie zbioru rozwiązań równania: $x\in\langle 0;2\rangle$.

Zadanie 2. (0–4)

Oblicz wartość wyrażenia $5^{3\log_5 3 - \log_{125} 27 + \log_{0,04} 9}$.

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania **1 punkt.**

Wykorzystanie wzoru na zamianę podstaw logarytmów do zapisania danego wyrażenia w postaci $5^{3\log_5 3 - \frac{\log_5 27}{\log_5 125} + \frac{\log_5 9}{\log_5 0,04}}$.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny **2 punkty.**

Wykorzystanie definicji logarytmu do zapisania danego wyrażenia w postaci
$5^{3\log_5 3-\frac{1}{3}\log_5 27-\frac{1}{2}\log_5 9}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania **3 punkty.**

Wykorzystanie twierdzeń o logarytmach do zapisania danego wyrażenia w postaci $5^{3\log_5 3-\log_5 3-\log_5 3}$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) **3 punkty.**

Rozwiązanie bezbłędne **4 punkty.**

Obliczenie wartości wyrażenia: $5^{\log_5 3}=3$.

Zadanie 3. (0–3)

Dane jest równanie $\frac{m-x}{2}=\frac{2x+8}{m}$ z niewiadomą x i parametrem m $(m\neq 0)$.
Ile rozwiązań ma to równanie w zależności od parametru m?

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny **1 punkt.**

Przekształcenie danego równania do postaci $x(m+4)=m^2-16$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania **2 punkty.**

Rozróżnienie przypadków $(1)\ m=-4$ oraz $(2)\ m\neq -4 \wedge m\neq 0$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) **2 punkty.**

Rozwiązanie bezbłędne **3 punkty.**

Określenie liczby rozwiązań równania $x(m+4)=m^2-16$ w zależności od wartości parametru m:
- dla $m=-4$ dane równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań,
- dla $m\neq -4 \wedge m\neq 0$ dane równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Zadanie 4. (0–4)

Liczby a, b, c, d $(a<b<c<d)$ są kolejnymi dodatnimi liczbami całkowitymi. Wykaż, że wielomian W opisany wzorem $W(x)=ax^3-bx^2-cx+d$ ma trzy pierwiastki.

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania **1 punkt.**

Zapisanie wielomianu W w postaci $W(x)=ax^3-(a+1)x^2-(a+2)x+a+3$, gdzie a jest liczbą całkowitą dodatnią.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny **2 punkty.**

Zauważenie i zapisanie, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu W.
Na przykład:
zapisanie, że $W(1)=0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania **3 punkty.**

Zapisanie wielomianu W w postaci $W(x)=(x-1)(ax^2-x-a-3)$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) **3 punkty.**

Rozwiązanie bezbłędne **4 punkty.**

Obliczenie wyróżnika trójmianu $ax^2-x-a-3$ i uzasadnienie, że wielomian W ma trzy pierwiastki, bo wyróżnik trójmianu jest dodatni dla dodatniej liczby całkowitej a i liczba 1 nie jest pierwiastkiem tego trójmianu.

Zadanie 5. (0–3)

Dana jest nierówność $\frac{m}{x^2+2}<2$ z niewiadomą x i parametrem m. Wyznacz wszystkie wartości m, dla których rozwiązaniem tej nierówności jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny **1 punkt.**

Przekształcenie nierówności do postaci $m<2x^2+4$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania **2 punkty.**

Przekształcenie nierówności $m<2x^2+4$ i zapisanie warunku, dla którego jej rozwiązaniem jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) **2 punkty.**

Rozwiązanie bezbłędne **3 punkty.**

Wyznaczenie wszystkich wartości m, dla których rozwiązaniem nierówności są wszystkie liczby rzeczywiste: $m<4$.

Zadanie 6. (0–3)

Wykaż, że jeżeli równanie $x^2+bx+c=0$ ma dwa pierwiastki takie, że odwrotność jednego z nich jest równa iloczynowi drugiego i liczby $\sqrt{3}$, to do wykresu funkcji f opisanej wzorem $f(x)=x^2+bx+c$ należy punkt $P=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny **1 punkt.**

Zapisanie warunku wynikającego z treści zadania i przekształcenie go do postaci
$\frac{1}{x_1}=\sqrt{3}\cdot x_2 \Leftrightarrow x_1x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania **2 punkty.**

Zastosowanie wzoru Viète'a do wyznaczenia współczynnika *c*: $c = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) **2 punkty.**

Rozwiązanie bezbłędne **3 punkty.**

Wykazanie, że do wykresu funkcji *f* należy punkt $P = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$: $f(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Zadanie 7. (0–5)

Trójkąt o bokach długości 4, 5 i 6 obraca się wokół najdłuższego boku. Oblicz objętość powstałej bryły.

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania **1 punkt.**

Obliczenie cosinusa kąta α leżącego naprzeciw najdłuższego boku: $36 = 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos\alpha$, stąd $\cos\alpha = \frac{1}{8}$.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny **2 punkty.**

Obliczenie sinusa α: $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania **4 punkty.**

Obliczenie *h* – wysokości trójkąta poprowadzonej do najdłuższego boku z równania:

$P_{\text{trójkąta}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot h$. Stąd $h = \frac{5\sqrt{7}}{4}$. **(1 punkt)**

Zauważenie, że bryła powstała przez obrót trójkąta jest sumą dwóch stożków, każdego o podstawie będącej kołem o promieniu długości $h = \frac{5\sqrt{7}}{4}$ i wysokościach odpowiednio równych *x* oraz 6 – *x*. **(1 punkt)**

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) **4 punkty.**

Rozwiązanie bezbłędne **5 punktów.**

Obliczenie objętości powstałej bryły:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{5\sqrt{7}}{4}\right)^2 x + \frac{1}{3}\pi\left(\frac{5\sqrt{7}}{4}\right)^2 (6-x) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{5\sqrt{7}}{4}\right)^2 \cdot 6 = \frac{175}{8}\pi.$$

Zadanie 8. (0–5)

Dany jest ciąg (a_n), w którym wyraz a_n jest sumą kolejnych liczb naturalnych od *n* do 2*n* $\left(a_n = n + (n+1) + (n+2) + \ldots + 2n\right)$. Oblicz najmniejszy wyraz ciągu (a_n), który jest większy od 2014.

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 punkt.

Zauważenie i zapisanie, że każdy wyraz ciągu (a_n) jest sumą $n+1$ składników kolejnych liczb naturalnych, począwszy od n.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 2 punkty.

Obliczenie sumy $n+1$ składników kolejnych liczb naturalnych, począwszy od n:

$S=\frac{3}{2}n(n+1)=a_n$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 punkty.

Zapisanie nierówności, za pomocą której można obliczyć, który wyraz ciągu (a_n) jest większy od 2014, czyli $\frac{3}{2}n(n+1)>2014$ i $n\in N$, oraz przekształcenie jej do postaci $n^2+n-1342\frac{2}{3}>0$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 punkty.

Rozwiązanie bezbłędne 5 punktów.

Wyznaczenie najmniejszego n, dla którego $a_n>2014$, czyli $n=37$. **(1 punkt)**
Obliczenie $a_{37}=2109$. **(1 punkt)**

Zadanie 9. (0–5)

Dany jest wielomian W opisany wzorem $W(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+20$. Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu W i reszta z dzielenia wielomianu W przez trójmian x^2-2x-3 jest równa $-x+26$. Wyznacz współczynniki a, b, c wielomianu W.

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 punkt.

Zapisanie wielomianu W w postaci $W(x)=P(x)(x^2-2x-3)-x+26$.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny 2 punkty.

Obliczenie pierwiastków trójmianu $x^2-2x-3: x_1=-1, x_2=3$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 4 punkty.

Zauważenie, że $W(-1)=27$ i $W(3)=23$ i $W(2)=0$. **(1 punkt)**

Ułożenie układu równań $\begin{cases}1-a+b-c+20=27\\81+27a+9b+3c+20=23\\16+8a+4b+2c+20=0\end{cases}$. **(1 punkt)**

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 punkty.

Rozwiązanie bezbłędne 5 punktów.

Rozwiązanie układu: $a=-1$, $b=-3$, $c=-8$.

Zadanie 10. (0–4)

W pojemniku są 4 kule białe, 3 kule zielone i n kul czarnych. Z pojemnika losujemy równocześnie 2 kule. Prawdopodobieństwo, że nie wylosujemy kuli białej jest równe $\frac{6}{13}$. Oblicz n.

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania — 1 punkt.

Podanie liczby elementów zbioru zdarzeń elementarnych w zależności od niewiadomej: $|\Omega| = \binom{7+n}{2}$.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny — 2 punkty.

Podanie $|A|$, gdzie A oznacza zdarzenie „nie wylosowano kuli białej”: $|A| = \binom{3+n}{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania — 3 punkty.

Zapisanie $P(A) : P(A) = \frac{(3+n)(2+n)}{(7+n)(6+n)}$.

Rozwiązanie bezbłędne — 4 punkty.

Rozwiązanie równania $\frac{(3+n)(2+n)}{(7+n)(6+n)} = \frac{6}{13}, n \in N_+ : \ n = 6$.

Zadanie 11. (0–6)

Suma trzech pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa 62. Te trzy liczby są również pierwszym, drugim i siódmym wyrazem ciągu arytmetycznego. Podaj wzory na n-te wyrazy tych ciągów.

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania — 1 punkt.

Zapisanie analizy zadania.
Na przykład:
(a_n) ciąg geometryczny: $a_1 + a_2 + a_3 = 62$ oraz q iloraz tego ciągu
(b_n) ciąg arytmetyczny: $b_1 + b_2 + b_7 = 62$ oraz r różnica tego ciągu
a pierwszy wyraz tych ciągów

$$a + aq + aq^2 = 62$$

$$a + (a+r) + (a+6r) = 62$$

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny — 2 punkty.

Zapisanie związku między ciągami w postaci układu równań:

$$\begin{cases} a + aq + aq^2 = 62 \\ a + (a+r) + (a+6r) = 62 \\ aq = a + r \end{cases}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania **4 punkty.**

Rozwiązanie bezbłędne układu równań (znalezienie obydwu rozwiązań układu):

$\begin{cases} q=1 \\ a=20\frac{2}{3} \\ r=0 \end{cases}$ **(1 punkt)** lub $\begin{cases} q=5 \\ a=2 \\ r=8 \end{cases}$ **(1 punkt)**.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) **5 punktów.**

Rozwiązanie bezbłędne **6 punktów.**

Gdy $a=20\frac{2}{3}$, $q=1$, $r=0$, to ciągi (a_n) i (b_n) są ciągami stałymi i $a_n=b_n=20\frac{2}{3}$. **(1 punkt)**

Gdy $a=2$, $q=5$, $r=8$, to $a_n=0,4\cdot 5^n$, $b_n=8n-6$. **(1 punkt)**

Zadanie 12. (0–4)

Dany jest okrąg o równaniu $(x-3)^2+(y-1)^2=5$. Wykaż, że styczne do tego okręgu przechodzące przez początek układu współrzędnych są prostopadłe.

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania **1 punkt.**

Zapisanie układu równań, za pomocą którego można wyznaczyć równania stycznych:

$\begin{cases} (x-3)^2+(y-1)^2=5 \\ y=mx \end{cases}$.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny **2 punkty.**

Zapisanie równania kwadratowego, wynikającego z układu równań:

$(m^2+1)x^2+(-2m-6)x+5=0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania **3 punkty.**

Obliczenie wyróżnika równania $(m^2+1)x^2+(-2m-6)x+5=0$ i zapisanie warunku wynikającego z faktu, że układ ma mieć dokładnie jedno rozwiązanie:

$\Delta=-8(2m^2-3m-2)$ i $\Delta=0$. **(1 punkt)**

Wyznaczenie wartości m spełniających te warunki: $m_1=-\frac{1}{2}$, $m_2=2$. **(1 punkt)**

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) **3 punkty.**

Rozwiązanie bezbłędne **4 punkty.**

Wykazanie, że proste o równaniach $y=-\frac{1}{2}x$ oraz $y=2x$ są prostopadłe: $m_1\cdot m_2=-1$.