MATURA 2014 z WSiP

Matematyka
Poziom podstawowy

Zasady oceniania zadań

Kartoteka testu

Numer zadania	Sprawdzana umiejętność (z numerem standardu) Uczeń:	Sprawdzana czynność Uczeń:	Maksymalna liczba punktów
1	stosuje podany wzór lub przepis postępowania, wykonuje rutynowe procedury (1)	oblicza wartość bezwzględną liczby niewymiernej	1
2	operuje znanymi obiektami matematycznymi (2)	oblicza różnicę liczby niewymiernej i liczby do niej przeciwnej	1
3	operuje znanymi obiektami matematycznymi (2)	oblicza procent, o jaki zmniejszono pole trapezu po zmianie wymiarów	1
4	stosuje strategię rozwiązania zadania, która jasno wynika z jego treści (4)	oblicza wartość wyrażenia, w którym występują potęgi	1
5	stosuje definicję lub twierdzenie w typowym kontekście (2)	oblicza wartość wyrażenia, w którym występują logarytmy	1
6	operuje znanymi obiektami matematycznymi (2)	oblicza miejsce zerowe funkcji liniowej	1
7	operuje znanymi obiektami matematycznymi (2)	oblicza współczynnik prostej równoległej do danej prostej	1
8	operuje znanymi obiektami matematycznymi (2)	podaje zbiór wartości funkcji	1
9	stosuje strategię rozwiązania zadania, która jasno wynika z jego treści (4)	wyznacza wzór funkcji kwadratowej, mając zbiór wartości i rozwiązanie nierówności	1
10	operuje znanymi obiektami matematycznymi (2)	podaje liczbę miejsc zerowych funkcji kwadratowej	1
11	operuje znanymi obiektami matematycznymi (2)	podaje liczbę pierwiastków wielomianu	1
12	operuje znanymi obiektami matematycznymi (2)	podaje stopień wielomianu będącego iloczynem wielomianów	1
13	operuje znanymi obiektami matematycznymi (2)	oblicza stosunek długości odcinków, na które wysokość trójkąta dzieli jego bok	1
14	operuje znanymi obiektami matematycznymi (2)	oblicza wartości funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym i wartość wyrażenia	1
15	stosuje strategię rozwiązania zadania, która jasno wynika z jego treści (4)	oblicza pole trapezu wyciętego z trójkąta	1
16	operuje znanymi obiektami matematycznymi (2)	oblicza długość boku rombu, znając jego pole i miarę kąta między bokami	1
17	operuje znanymi obiektami matematycznymi (2)	oblicza długość średnicy okręgu i długość boku trójkąta wpisanego w okrąg	1
18	operuje znanymi obiektami matematycznymi (2)	oblicza różnicę ciągu arytmetycznego, mając dany pierwszy wyraz oraz sumę kilku początkowych wyrazów	1
19	stosuje strategię rozwiązania zadania, która jasno wynika z jego treści (4)	oblicza pierwszy wyraz ciągu geometrycznego, mając związki między innymi wyrazami tego ciągu	1
20	buduje model matematyczny danej sytuacji przy uwzględnieniu ograniczeń i zastrzeżeń (3)	oblicza, ile jest czterocyfrowych liczb, uwzględniając zadane warunki	1

21	operuje znanymi obiektami matematycznymi (2)	oblicza prawdopodobieństwo zdarzenia ze związku między prawdopodobieństwami zdarzenia i zdarzenia przeciwnego	1
22	operuje znanymi obiektami matematycznymi (2)	oblicza objętość walca, znając jego przekrój	1
23	stosuje strategię rozwiązania zadania, która jasno wynika z jego treści (4)	oblicza objętość ostrosłupa na podstawie jego siatki	1
24	operuje znanymi obiektami matematycznymi (2)	wyznacza liczbę ujemnych wyrazów ciągu	2
25	operuje znanymi obiektami matematycznymi (2)	rozwiązuje równanie trzeciego stopnia	2
26	prowadzi rozumowanie składające się z niewielkiej liczby kroków (5)	uzasadnia, że równanie kwadratowe spełniające podane warunki ma rozwiązanie	2
27	operuje znanymi obiektami matematycznymi (2)	oblicza sinus kąta, jaki prosta tworzy z osią x	2
28	prowadzi rozumowanie składające się z niewielkiej liczby kroków (5)	wykazuje związek między polami trójkątów	2
29	stosuje strategię rozwiązania zadania, która jasno wynika z jego treści (4)	wyznacza równanie okręgu stycznego do danej prostej	2
30	dobiera model matematyczny do podanej sytuacji (np. praktycznej) (3)	oblicza prawdopodobieństwo zdarzenia	2
31	stosuje strategię rozwiązania zadania, która jasno wynika z jego treści (4)	oblicza sumę wyrazów ciągu danego wzorem	4
32	dobiera model matematyczny do podanej sytuacji (np. praktycznej) (3)	oblicza długość drogi, znając liczbę obrotów koła i jego wymiary	4
33	stosuje strategię rozwiązania zadania, która jasno wynika z jego treści (4)	oblicza objętość ostrosłupa, znając kąt między ścianą a podstawą i pole powierzchni ściany bocznej	5

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

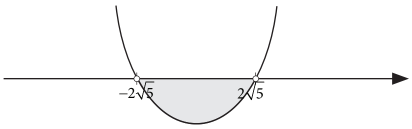
Numer zadania	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Poprawna odpowiedź	C	D	D	B	B	A	B	C	C	A

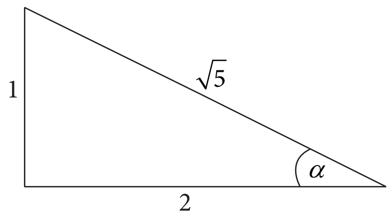
Numer zadania	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Poprawna odpowiedź	B	C	B	C	A	C	C	D	D	C

Numer zadania	**21**	**22**	**23**
Poprawna odpowiedź	D	A	A

Za każdą poprawną odpowiedź w zadaniach zamkniętych uczeń otrzymuje 1 punkt.

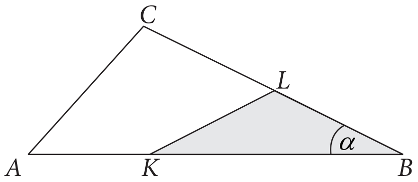
Schemat oceniania pozostałych zadań

Numer zadania	Rozwiązanie	Zasady punktowania	Punktacja
24	$n^2-20<0$ i $n\in N_+$ $\left(n-2\sqrt{5}\right)\left(n+2\sqrt{5}\right)<0$ i $n\in N_+$  $n\in\{1,2,3,4\}$ $a_1<0,\ a_2<0,\ a_3<0,\ a_4<0$ Cztery wyrazy ciągu są ujemne.	**Uczeń otrzymuje 1 punkt**, gdy zapisze nierówność $n^2-20<0$ i obliczy pierwiastki trójmianu n^2-20 : $n_1=-2\sqrt{5}$, $n_2=2\sqrt{5}$. **Uczeń otrzymuje 2 punkty**, gdy rozwiąże nierówność $n^2-20<0$ i poda liczbę ujemnych wyrazów ciągu (a_n) : Ciąg (a_n) ma cztery wyrazy ujemne.	0–2
25	**I sposób rozwiązania** $(x-2)^2+x^3-8=0$ $(x-2)^2+(x-2)\left(x^2+2x+4\right)=0$ $(x-2)\left(x-2+x^2+2x+4\right)=0$ $(x-2)\left(x^2+3x+2\right)=0$ $\Delta=9-8=1$ $x_1=\frac{-3-1}{2}=-2,\ x_2=\frac{-3+1}{2}=-1$ $x=-2$ lub $x=-1$, lub $x=2$ **II sposób rozwiązania** $(x-2)^2+x^3-8=0$ $x^2-4x+4+x^3-8=0$ $x^3+x^2-4x-4=0$ $x^2(x+1)-4(x+1)=0$ $\left(x^2-4\right)(x+1)=0$ $(x+2)(x+1)(x-2)=0$ $x=-2$ lub $x=-1$, lub $x=2$	**Uczeń otrzymuje 1 punkt**, gdy przekształci dane równanie do postaci, z której można odczytać jeden z jego pierwiastków, np. $(x-2)\left(x^2+3x+2\right)=0$ lub $\left(x^2-4\right)(x+1)=0.$ **Uczeń otrzymuje 2 punkty**, gdy rozwiąże dane równanie: $x=-2$ lub $x=-1$, lub $x=2$.	0–2

26	**Założenie:** $a+b+c=0$ **Teza:** $\Delta \geq 0$ **Dowód:** $\begin{cases} a+b+c=0 \\ \Delta = b^2-4ac \end{cases}$ $\begin{cases} b=-(a+c) \\ \Delta = (a+c)^2-4ac \end{cases}$ $\Downarrow$ $\Delta = a^2+2ac+c^2-4ac$ $\Downarrow$ $\Delta = a^2-2ac+c^2=(a-c)^2$ $\Downarrow$ $\Delta \geq 0$ Jeśli wyróżnik trójmianu jest liczbą nieujemną, to trójmian ma co najmniej jedno miejsce zerowe.	**Uczeń otrzymuje 1 punkt**, gdy zapisze wyróżnik trójmianu ax^2+bx+c z wykorzystaniem założenia $a+b+c=0$, np. $\begin{cases} b=-(a+c) \\ \Delta = (a+c)^2-4ac \end{cases}$. **Uczeń otrzymuje 2 punkty**, gdy wykaże, że wyróżnik trójmianu ax^2+bx+c jest nieujemny przy założeniu, że $a+b+c=0$.	0–2
27	**I sposób rozwiązania** $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}$  $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ **II sposób rozwiązania** Korzystamy z tożsamości trygonometrycznych. $\begin{cases} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2} \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ 0^\circ < \alpha < 90^\circ \end{cases}$ $\begin{cases} \cos\alpha = 2\sin\alpha \\ \sin^2\alpha + (2\sin\alpha)^2 = 1 \\ 0^\circ < \alpha < 90^\circ \end{cases}$ $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$	**Uczeń otrzymuje 1 punkt**, gdy zauważy, że $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. **Uczeń otrzymuje 2 punkty**, gdy obliczy $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.	0–2

<table>
<tr>
<td>28</td>
<td>

Założenie:



$\frac{|AB|}{|BK|}=\sqrt{2}$ oraz $\frac{|BC|}{|BL|}=2\sqrt{2}$

Teza: $P_{\Delta KBL}=\frac{1}{4}P_{\Delta ABC}$

Dowód:

$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|BC|\cdot\sin\alpha$

$|BK|=\frac{|AB|}{\sqrt{2}}=\frac{|AB|\cdot\sqrt{2}}{2}$

$|BL|=\frac{|BC|}{2\sqrt{2}}=\frac{|BC|\cdot\sqrt{2}}{4}$

$P_{\Delta KBL}=\frac{1}{2}|BK|\cdot|BL|\cdot\sin\alpha$

$P_{\Delta KBL}=\frac{1}{2}\frac{|AB|\sqrt{2}\cdot|BC|\sqrt{2}}{2\cdot4}\cdot\sin\alpha$

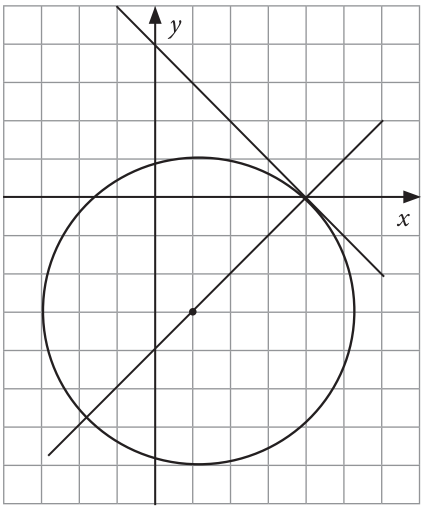
$P_{\Delta KBL}=\frac{1}{2}\frac{|AB|\cdot|BC|}{4}\cdot\sin\alpha=\frac{1}{4}P_{\Delta ABC}$

</td>
<td>

Uczeń otrzymuje 1 punkt, gdy wyrazi długości odcinków KB i LB wykorzystując długości odcinków AB i CB.

Uczeń otrzymuje 2 punkty, gdy wykaże, że pole trojkąta KBL jest czterokrotnie mniejsze od pola trojkąta ABC.

</td>
<td>0–2</td>
</tr>
<tr>
<td>29</td>
<td>



$x+y-4=0 \;\Rightarrow$

$r=\frac{|1-3-4|}{\sqrt{1+1}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

Okrąg styczny ma równanie:
$(x-1)^2+(y+3)^2=18.$

</td>
<td>

Uczeń otrzymuje 1 punkt, gdy obliczy długość promienia okręgu $r=3\sqrt{2}$.

Uczeń otrzymuje 2 punkty, gdy zapisze równanie okręgu $(x-1)^2+(y+3)^2=18.$

</td>
<td>0–2</td>
</tr>
</table>

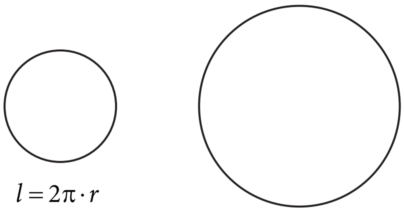
<table>
<tr>
<td>30</td>
<td>
<table>
<tr><th></th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>6</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>6</td><td></td><td></td><td>12</td><td></td><td></td><td>18</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td>12</td><td></td><td>18</td><td></td><td>24</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>12</td><td></td><td></td><td>24</td><td></td><td></td><td>36</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td>30</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary (x, y), gdzie
$x \in X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
$y \in Y = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
$|\Omega| = 5 \cdot 7 = 35$
$A = \{(x, y) : x \in X, y \in Y, 6 | (x \cdot y)\}$
$|A| = 11$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{11}{35}$
</td>
<td>
Uczeń otrzymuje 1 punkt,
gdy wyznaczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 5 \cdot 7 = 35$ lub liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 11$.

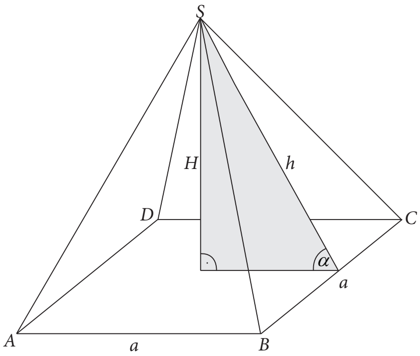
Uczeń otrzymuje 2 punkty,
gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{11}{35}$.
Uwaga: Jeżeli uczeń otrzyma $P(A) > 1$, otrzymuje 0 punktów.
</td>
<td>0–2</td>
</tr>
<tr>
<td>31</td>
<td>
$a_1 = -1,\ a_3 = 3,\ a_5 = 7, \ldots\ a_{31} = 59$
$a_1 + a_3 + \ldots + a_{31} = \frac{-1+59}{2} \cdot 16 = 464$
$a_2 = 1,\ a_4 = 1,\ a_6 = 1, \ldots,\ a_{32} = 1$
$a_2 + a_4 + \ldots + a_{32} = 16 \cdot 1 = 16$
$a_1 + a_2 + \ldots + a_{32} = 464 + 16 = 480$
</td>
<td>
Uczeń otrzymuje 1 punkt,
gdy przedstawi rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania, czyli obliczy sumę 16 początkowych wyrazów ciągu (a_n) o numerach parzystych: $a_2 + a_4 + \ldots + a_{32} = 16 \cdot 1 = 16$.

Uczeń otrzymuje 2 punkty,
gdy przedstawi rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, czyli zauważy, że wartości wyrażenia $2n-3$ dla n nieparzystych są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego (b_n) i zapisze, że pierwszy wyraz tego ciągu równa się -1, a różnica r jest równa 4.

Uczeń otrzymuje 3 punkty,
gdy przedstawi rozwiązanie, w którym pokonał zasadnicze trudności, czyli obliczy S_n – sumę 16 początkowych wyrazów ciągu (b_n): $S_n = 464$.

Uczeń otrzymuje 4 punkty,
gdy przedstawi pełne rozwiązanie, czyli obliczy sumę 32 początkowych wyrazów ciągu (a_n): $S = 16 + 464 = 480$.
</td>
<td>0–4</td>
</tr>
</table>

32	 $l = 2\pi \cdot r$ $L = 2\pi \cdot R$ **I sposób rozwiązania** $8000 \cdot 2\pi r = 6000 \cdot 2\pi R$ $8r = 6R \Rightarrow r = \frac{3}{4}R$ $2\pi r + 0{,}6 = 2\pi R$ $2\pi \cdot \frac{3}{4}R + 0{,}6 = 2\pi R$ $R = \frac{1{,}2}{\pi}$ $s = 6000 \cdot 2\pi \cdot \frac{1{,}2}{\pi} = 6000 \cdot 2{,}4 = 14\ 400$ **II sposób rozwiązania** $L = l + 0{,}6$ $8000l = 6000L$ $8l = 6 \cdot (l + 0{,}6)$ $l = 1{,}8$ $s = 8000 \cdot 1{,}8 = 14\ 400$	**Uczeń otrzymuje 1 punkt,** gdy przedstawi rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania, czyli wprowadzi oznaczenia, np. obwód przedniego koła $l = 2\pi \cdot r$, obwód tylnego koła $L = 2\pi \cdot R$. **Uczeń otrzymuje 2 punkty,** gdy przedstawi rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, czyli zapisze zależność pomiędzy długościami promieni obydwóch kół, np. $r = \frac{3}{4}R$, lub zapisze zależność między obwodami obydwóch kół, np. $L = l + 0{,}6$. **Uczeń otrzymuje 3 punkty,** gdy przedstawi rozwiązanie, w którym pokonał zasadnicze trudności, czyli obliczy promień jednego z kół ciągnika, np. $R = \frac{1{,}2}{\pi}$, lub obliczy obwód jednego z kół ciągnika, np. $l = 1{,}8$. **Uczeń otrzymuje 4 punkty,** gdy przedstawi pełne rozwiązanie, czyli obliczy drogę, którą przejechał ciągnik: $s = 14\ 400$ m $= 14{,}4$ km.	0–4

33	 $P_{\Delta ABS} = P_{\Delta BCS} = 6$ $\cos\alpha = \dfrac{\frac{1}{2}a}{h} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow h = \dfrac{2}{3}a$ $P_{\Delta BCS} = \dfrac{1}{2}ah = \dfrac{1}{2}a \cdot \dfrac{2}{3}a = \dfrac{1}{3}a^2 = 6$ $\Downarrow$ $a = 3\sqrt{2}$ i $h = 2\sqrt{2}$ $\Downarrow$ i twierdzenia Pitagorasa $H = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$ $V = \dfrac{1}{3}P_pH = \dfrac{1}{3}\cdot\left(3\sqrt{2}\right)^2 \cdot \dfrac{\sqrt{14}}{2} = 3\sqrt{14}$	**Uczeń otrzymuje 1 punkt,** gdy przedstawi rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania, czyli zapisze zależność między a i h: $\cos\alpha = \dfrac{\frac{1}{2}a}{h} = \dfrac{3}{4}$. **Uczeń otrzymuje 2 punkty,** gdy przedstawi rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, czyli zapisze zależność: $h = \dfrac{2}{3}a$ lub $a = \dfrac{3}{2}h$. **Uczeń otrzymuje 3 punkty,** gdy przedstawi rozwiązanie, w którym pokonał zasadnicze trudności, czyli obliczy długość krawędzi podstawy i wysokość ściany bocznej ostrosłupa: $a = 3\sqrt{2}$ i $h = 2\sqrt{2}$. **Uczeń otrzymuje 4 punkty,** gdy przedstawi pełne rozwiązanie z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe). **Uczeń otrzymuje 5 punktów,** gdy przedstawi pełne rozwiązanie, czyli obliczy objętość ostrosłupa: $V = 3\sqrt{14}$.	0–5